W9D2
22/12/14

גיאומטריה לא אוקלידית

יסודות הגאומטריה הרימנית

מרחב משיק ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח) $T_xU=\{\varphi: C^\infty(U)\to\mathbb{R}$ {לינאריים ומקיימים כלל לייבניץ}

מרחב וקטורי n-ממדי עם בסיס $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$, $\varphi=\sum_{i=1}^n \alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$

הסתכלות אחרת - $\gamma:[a,b]\to U\subseteq\mathbb{R}^n$, $t\in[a,b]$ $\gamma'(t_0)=\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t_0}\in T_{\underset{x}{\gamma(t_0)}}U$

[מודולו פרמטריזציה מחדש]

זה שקול - $T_{\gamma(t_0)}U\to T_xU$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\xi=\gamma'(t_0)\longmapsto(\varphi: C^\infty(U)\to\mathbb{R})$

$f:U\to\mathbb{R}\mapsto\gamma\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\left(\varphi=\frac{d(\gamma\circ f)}{dt}\in\mathbb{R}\right)$.

מטריקה רימנית

$g(x)$ תבנית ריבועית חיובית לחלוטין עם תלות חלקה ב-x (סימטרית) $\begin{pmatrix}g_{11}(x)&\cdots&g_{1n}(x)\\ \vdots&&\vdots\\ g_{n1}(x)&\cdots&g_{nn}(x)\end{pmatrix}$. אז יש מכפלה סקלרית

$\xi^T g\eta=g(\xi,\eta)$ מכפלה סקלרית ב-T_xU. נאמר $|\xi|=\sqrt{g(\xi,\xi)}$.

הגדרה $\gamma:[a,b]\to U\in\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה, $\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b|\dot\gamma(t)|dt$.

מטריקה מושרית ואיזומטריות

$U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ תחומים פתוחים, $F:U\to V$ דיפאומורפיזם. נניח ש-g מטריקה רימנית ב-V. נגדיר מטריקה רימנית מושרית ב-U F^*g ע"י $F^*g_x(\xi,\eta)=g_{F(x)}(D_xF(\xi),D_xF(\eta))$.

אם g_2 מטריקה רימנית ב-V, g_1 ב-U, F איזומטריה אם $F^*g_2=g_1$. $g_1(x)=(DF_x)^Tg_2(F(x))(DF_x)$.

מטריקה רימנית היפרבולית ב-H

ל-$(x,y)\in H$ נגדיר $g(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{y^2}&0\\0&\frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$ $(y>0)$. $Iso(H)\subseteq RIso(H)$

למה $g(x,y)$ אינווריאנטית ל-$Iso(H)$.

הוכחה מספיק לבדוק (א) $z\mapsto-\bar z$, (ב) $z\mapsto\frac{r^2z}{|z|^2}$, (ג) $z\mapsto z+a$.

(א) $(x,y)\mapsto(-x,y)$, $DF_{(x,y)}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1/y^2&0\\0&1/y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1/y^2&0\\0&1/y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(ג) $DF_x=I$ ולכן אין מה להוכיח.

(ב) $(x,y)\mapsto\frac{r^2}{x^2+y^2}(x,y)$, $DF_{(x,y)}=\frac{r^2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}y^2-x^2&-2xy\\-2xy&x^2-y^2\end{pmatrix}$. נוכיח -

$\frac{1}{y^2} I \overset{?}{=} D^T \frac{1}{(y')^2} I D = \frac{1}{(y')^2}(D^T D) = \frac{(x^2+y^2)^2}{r^4 y^2}\cdot\frac{r^4}{(x^2+y^2)^4}(x^2+y^2)^2 I = \frac{1}{y^2} I$

למה יהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{H}$ קטע של קו היפרבולי. אז $\mathcal{L}(\gamma)=\rho(\gamma(a),\gamma(b))$.

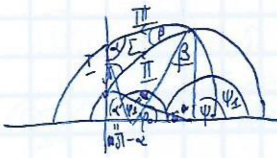
הוכחה מספיק (מהלמה הקודמת) להוכיח ל-γ קטע מהקו המקומה ($x=0$), כי $\gamma(t)=ti$. $\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\frac{1}{t}dt=\log\frac{b}{a}$, וזה אכן $\rho(\gamma(a),\gamma(b))$ כפי שהוכחנו בתרגיל.

משפט יהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{H}$, $\gamma(a)=A,\ \gamma(b)=B$. אז $\mathcal{L}(\gamma)\le\rho(A,B)$ ושוויון אמ"מ γ קטע של קו היפרבולי.

הוכחה שוב נוכל להניח $A=(0,t_1),\ B=(0,t_2)$. כעת $\rho(A,B)=\log\frac{t_2}{t_1}$.
$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{y}dt\ge\int_a^b\frac{y'}{y}dt=\log y\Big|_a^b=\log\frac{b}{a}$, שוויון רק כש- $x\equiv0$, $y'\ge0$.

שטח בגיאומטריה רימנית (קו מינימית)

הגדרה: $U\subseteq\mathbb{R}^2$ - ל- פתוח, g, Σ קומפקטי. $S(\Sigma)=\iint_\Sigma \det g\,dx\,dy$.



במקרה אוקלידי g מטריצת יחידה.

משפט $S=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ למשולש היפרבולי.

הוכחה לפי נוסחת גרין $\oint_{\partial\Sigma}F\,dx+G\,dy=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy$.
כעת $\iint_\Sigma\det g\,dx\,dy=\iint_\Sigma\frac{dx\,dy}{y^2}=\oint_{\partial\Sigma}\frac{dx}{y}$. נשים לב ש- $\oint_I\frac{dx}{y}=0$ כי $x\equiv0$.
ומעגל,
$\oint_\gamma\frac{dx}{y}=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{-r\sin\varphi}{r\sin\varphi}d\varphi=\varphi_0-\varphi_1$.
לכן $\oint\frac{dx}{y}=\varphi_0-\varphi_1$, $\oint_{II}\frac{dx}{y}=\psi_0-\psi_1$ כעת,
ומהכך נקבל $\psi_0=\pi-\gamma$, III, $-\psi_1=-\alpha-1$, $\varphi_0-\psi_0=-\beta$.

מסקנה $\oint_{\partial\Sigma}\frac{dx}{y}=\pi-\alpha-\beta-\gamma$. שטח מצולע עם זוויות $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ הוא $S=(n-2)\pi-\sum_{i=1}^{n}\alpha_n$

לכן שטח משולש היפרבולי $\le\pi$. "שוויון - כשקדקודים על השפה".

עקמומיות גאוס

הגדרה כללית - $\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$

$$K=\frac{1}{\det g}\left(\frac{\partial\Gamma_{11,2}}{\partial x_2}-\frac{\partial\Gamma_{12,2}}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{(\det g)^2}\left[\det\begin{pmatrix}0&\Gamma_{11,1}&\Gamma_{11,2}\\\Gamma_{22,1}&g_{11}&g_{12}\\\Gamma_{22,2}&g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}0&\Gamma_{12,1}&\Gamma_{12,2}\\\Gamma_{12,1}&g_{11}&g_{12}\\\Gamma_{12,2}&g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\right]$$

א) צורה חצי גיאודזית $g=\begin{pmatrix}1&0\\0&G(x_1,x_2)\end{pmatrix}$, $K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial x_1^2}$

ב) צורה קונפורמלית $g=\lambda(x_1,x_2)I$, $K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta\log\lambda$.

דוגמה במישור היפרבולי $\mathbb{H}$, $g = \frac{1}{y^2}$ ולכן $\log g = -2\log y$, ו-

$\Delta \log g = \frac{2}{y^2}$, $K = -\frac{1}{2(1/y^2)}\left(\frac{2}{y^2}\right) = -1$ עקמומיות קבועה שלילית

דוגמאות (תאור גיאומטרי של K)

ניקח עיגול ומעגל רימ"י סביב x מרדיוס r. S_x משפט:

$$K = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi r^3}\left(2\pi r - L(S_x(r))\right),\quad K = \lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi r^4}\left(\pi r^2 - S(D_x(r))\right)$$

למשל ל-$D\subseteq \mathbb{H}$ עם מרכז היפרבולי i (מספיק מקרה זה) ורדיוס r,

כך שנקודות החיתוך עם הצירים הן e^{-r}, e^{r} (מרכז אוקלידי $\cosh r$

ורדיוס אוקלידי $\sinh r$). מעגל נתון $\gamma(\varphi) = (\sinh r\cos\varphi, \cosh r + \sinh r\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$

$$S(D_i(r)) = \oint_{\partial D_i(r)} \frac{dx}{y} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sinh r\sin\varphi}{\cosh r + \sinh r\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{-\tanh r \sin\varphi}{1+\tanh r\sin\varphi}\,d\varphi =$$

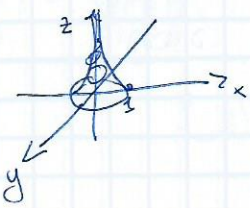
$$\int_0^{2\pi} -\tanh r\sin\varphi\left(1-\tanh r\sin\varphi + \tanh^2 r\sin^2\varphi - \tanh^2 r \sin^3\varphi + \dots\right) =$$

לפי טור טיילור של $\tanh$

$$(\tanh r)^2\pi + (\tanh r)^4\frac{3\pi}{4} + \dots = \pi r^2 + \frac{\pi r^4}{12} + \dots$$

ולכן עקמומיות גאוס היא -1.

פסאודו-ספירה $M\subseteq\mathbb{R}^3$



ניקח עקומה במישור xz,
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cosh t} \\ z = t - \tanh t \\ 0\le t<\infty \end{cases}$$

ונסובב סביב ציר z.

משפט מקומית, M איזומטרית למישור היפרבולי.

הוכחה מטריקה של M מושרית מ-$\mathbb{R}^3$. $r(\varphi,t) = \left(\frac{1}{\cosh t}\cos\varphi, \frac{1}{\cosh t}\sin\varphi, t-\tanh t\right)$

בסיס של $T_{x_0}M = \{r_\varphi, r_t\}$ כאשר $r_\varphi = \left(\frac{-\sin\varphi}{\cosh t}, \frac{\cos\varphi}{\cosh t}, 0\right)$, $r_t = \left(\frac{-\sinh t\cos\varphi}{\cosh^2 t}, \frac{-\sinh t\sin\varphi}{\cosh^2 t}, 1-\frac{1}{\cosh^2 t}\right)$.

$$ds^2 = (r_t)^2dt^2 + 2\overset{0}{(r_t,r_\varphi)}\,dt\,d\varphi + (r_\varphi)^2 d\varphi^2 = (\tanh t)^2dt^2 + \frac{d\varphi^2}{(\cosh t)^2}.$$

לנו היה $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. לכן נעשה שינוי קואורדינטות $\cosh t = R$, $\sinh t\, dt = dR$

ונקבל $\frac{dR^2+d\varphi^2}{R^2}$.

למה זו פסאודו-ספירה? אפשר לשכן $\mathbb{H}$ ב-$\mathbb{R}^3$ - לא עם מטריקה אוקלידית אבל כן עם מטריקה פסאודו-אוקלידית

חבורות דיסקרטיות וריצופים במישור היפרבולי

דוגמה: **משפט** - לכל מצולע P במישור היפרבולי עם זוויות $\alpha_i = \frac{\pi}{p_i}$ $(p_i\ge 2)$

קיימת תת חבורה דיסקרטית $\Gamma\subseteq Iso(\mathbb{H})$ עם תחום יסודי P

Γ נוצרת ע"י שיקופים ביחס לצלעות של P.

לא נוכיח משפט כללי כל כך, ~~אם~~ נגביל למקרים שבהן המנה מגדירה

~~משטח~~ משטח חלק, ולחבורות <u>שומרות אוריינטציה</u>.

נאפיין חבורות דיסקרטיות $\Gamma \subseteq Iso^+(\mathbb{H})$ (עבורן המנה חלקה).

נזכור: $Iso^+(\mathbb{H}) \cong SL(2,\mathbb{R})/_{\{\pm I\}}$; $\{\pm I\} \to SL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi} Iso(\mathbb{H})$

<u>הגדרה</u> Γ דיסקרטית אם לכל נק' מסלול דיסקרטי (אין נק' הצטברות).

<u>דוגמאות</u> $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle$, $g_1(z)=\alpha z, g_2(z)=\beta z$ ($0<\alpha,\beta$) כך ש- $\log\alpha/\log\beta$ בת"ל

מעל Q <u>לא דיסקרטית</u> - $\alpha^m\beta^n z_0$ צפופה ב- $\mathbb{R}^+$.

$\Gamma \in Iso(\Delta)=\langle g\rangle$ סיבוב בזווית $2\pi\alpha$ $\mathbb{R}_+$ - α אי רציונלי.

<u>משפט</u> $\Gamma \subseteq Iso^+(\mathbb{H})$ דיסקרטית $\iff$ $A(\Gamma)=\Phi^{-1}(\Gamma)$ קבוצה דיסקרטית (ב- $\mathbb{R}^4$ למשל).

<u>דוגמה</u> $SL(2,\mathbb{Z})$ דיסקרטית ב- $SL(2,\mathbb{R})$ - יש ח של טרנספורמציות ממקדמים שלמים.

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$ נניח בשלילה $A(\Gamma)$ לא דיסקרטית. אז' $\underset{\in A(\Gamma)}{A_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} B$.

ונוכל להניח $B=I$ (כי למשל $A_{k+1}A_k^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} I$). ב- Γ נקבל

$\frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}$. קיימת z ~~[illegible]~~

כך ש- $\varphi_k(z) \neq \varphi_j(z)$ ~~[illegible]~~ משיקולי עוצמה ולכן z נק' הצטברות.

$\Rightarrow$ בשבוע הבא. כיוון יותר מעניין.