W8D2

15/12/14

ג'יאו' לא-אוקלידית

ראינו משפט $MISo^+(B)=Iso^+(B)$.

משפט למישור $\mathbb{H}$, $Iso(\mathbb{H})=\left\{ \frac{az+b}{cz+d},\ \frac{-a\bar z+b}{-c\bar z+d} \ \middle|\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{R}) \right\}$.

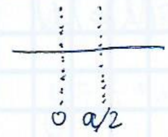
הוכחה אם $f\in Iso(\mathbb{H})/Iso^+(\mathbb{H})$ הרכבה עם φ שיקוף ביחס לציר המדומה $\varphi(z)=-\bar z$ תיתן משהו ב-Iso^+. לכן $f\varphi=\frac{az+b}{cz+d}$

ולכן $f=\frac{-a\bar z+b}{-b\bar z+d}$.

במעגל יחידה - תרגיל.

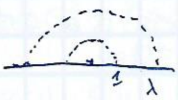
משפט $Iso(\mathbb{H})$ נוצרת ע"י שיקופים ביחס לקווים היפרבוליים.

הוכחה א) כל שיקוף ביחס לישר היפרבולי שייך ל-$\mathbb{H}$



ב) מספיק לבדוק ל- $z\mapsto z+a$ ל- $a\in\mathbb{R}$

$z\to\lambda^2 z$ $\lambda^2>0$



מסקנה כל איזו' היא [ב-D גם אליפטיות]

הרכבה של ≤ 3 שיקופים היפרבוליים.

מסקנה כל איזו' של $\mathbb{H}$ נקבעת ביחידות ע"י תמונה של 3 נק' (לא על ישר היפרבולי אחד).

הוכחה תהי $f\in Iso$ שמעבירה את A ל-A', B ל-B', C ל-C'. קיים שיקוף S_1 ששולח את A ל-A'. קיים שיקוף ששומר על A ומעביר $B''=S_1\circ f(B)$ ל-B. ל-$g=S_2\circ S_1\circ f$ או ש-$f(C)=C$ או תמונה של C ע"י שיקוף דרך ישר שעובר ב-A,B, מטעמי מרחק. נוכיח.

טענה לכל $z_1,z_2\in\mathbb{H}$, $\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1,z_2)\right)=\frac{|z_1-z_2|^2}{2\sqrt{\mathrm{Im}z_1\mathrm{Im}z_2}}$. הוכחה כתרגיל.

נוכיח מספיק להתבונן ב- $A=it$, $B=iu$, $t,u>0$.

נראה שיש 2 פתרונות ל- $\rho(A,C)=a$

$\rho(B,C)=b$, $C=z=x+iy$. $\sinh(\frac{a}{2})=\frac{|z-it|^2}{2\sqrt{t}\sqrt{\mathrm{Im}z}}$, $\sinh(\frac{b}{2})=\frac{|z-iu|^2}{2\sqrt{t}\sqrt{\mathrm{Im}u}}$.

לאחר פישוט נקבל $x^2+(y-t)^2=2a'\sqrt{t}\sqrt{y}$ ו- $x^2+(y-u)^2=2b'\sqrt{u}\sqrt{y}$, ולבסוף

$y+\sqrt{y}\left(\frac{b'\sqrt{u}-a'\sqrt{t}}{u-t}\right)-(u+t)=0$. $-(u+t)<0$ ולכן קיים y חיובי

יחיד. נקבל 2 פתרונות ל- x $(\pm)$

לכן f מוגדרת ביחידות ע"י נק' אלה.

הצגת טרנס' מביוס כהרכבות שיקופים

$M(2) \leq GM(2)$ מאינדקס 2.

<u>למה</u> $\varphi \in GM(2)$ שיקוף $\iff$ $\varphi \in \bar{M}, Fix(\varphi) \neq \emptyset, \varphi^2 = id$.

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$ פשוט מאוד.

$\Rightarrow$ <u>טענה</u>: f שיקוף לגבי מעגל (מוכלל) γ, gfg^{-1} שיקוף לגבי $g(\gamma)$

<u>הוכחה</u>: תרגיל.

כעת, תהי φ שמקיימת את 3 התנאים האלה.

$\varphi = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$. ע"י הצמדה נוכל להניח $\varphi(0)=0$, $\varphi(\infty)=\infty$

לכן $b=c=0$ ו- $\varphi(z)=\lambda\bar{z}$. $\varphi^2 = id$ ולכן $|\lambda|^2=1$, $\lambda\bar{\lambda}$.

לכן φ שיקוף עד כדי הצמדה, ומהטענה היא שיקוף.

<u>משפט</u> $id \neq \varphi \in M$. אם היא אינה לוקסודרומית היא הרכבה של 2 שיקופים. אחרת של 4. קל להצגה היפ', אליפט'. לוקס' = הרכבה של 2.

אין עם הרכבה של 2 - $\varphi = \frac{az+b}{cz+d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אז נניח

בשלילה $\varphi = S \circ J$. אז $\varphi \underbrace{J \varphi J}_{\bar{A}} = id$. אי אפשר $-I$ כי

נקבל $\bar{a} = -d$, $b, c \in \mathbb{R}$, $A\bar{A} = \pm I$ כלומר, $A = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & -\bar{a} \end{pmatrix}$.

$1 = \det A = -|a|^2 - \alpha\beta$. כך $Fix(\varphi J) \neq \emptyset$ ולכן קיים z כך ש-

$\frac{a\bar{z} + \alpha}{\beta\bar{z} - \bar{a}} = z$ אז, $\beta|z|^2 - \bar{a}z = a\bar{z} + \alpha$ ו- $\beta|z|^2 - \alpha = 2\mathrm{Re}\, a\bar{z}$. ניקח

$a = a_1 + ia_2$, $z = x + iy$. אז נקבל $\beta x^2 + \beta y^2 - 2a_1 x - 2a_2 y - \alpha = 0$

משוואת מעגל: $(x - \frac{a_1}{\beta})^2 + (y - \frac{a_2}{\beta})^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{a_1^2 + a_2^2}{\beta^2}$ אבל $\frac{\beta\alpha + |a|^2}{\beta^2} = \frac{-1}{\beta^2}$

ולכן אין פתרון.

לכן $A\bar{A} = I$ ו- $a = \bar{d}, b, c \in i\mathbb{R}$. לכן $\mathrm{Tr}\, A \in \mathbb{R}$ והסתירה ללוקס'.

יסודות הגיאומטריה הרימנית

וקטור/מרחב משיק

$U \in \mathbb{R}^n$ תחום פתוח, $x \in U$. נגדיר $T_x U$ מרחב משיק:

<u>הגדרה</u> $T_x U$ מרחב אופרטורים $\varphi : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ כך ש- $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$

ו- $\varphi(fg) = f(x)\varphi(g) + g(x)\varphi(f)$.

<u>משפט</u> $T_{x_0} U$ מרחב לינארי n-מימדי עם בסיס $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_0}$.

(לא נוכיח כאן)

וקטור משיק: $\xi = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big| + \dots + \varphi_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|$ (הגדרת הכיוון ב-...

הגדרה 2 - $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוח, $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוח, $F:U\to V$ חלקה.
(דיפרנציאל)

דיפרנציאל D_xF הוא אופרטור מ-$T_xU\to T_{F(x)}V$ שמוגדר

על וקטור משיק ξ - $D_xF(\xi)(f)=\xi(f\circ F)$.

למה $D_{x_0}F$ העתקה לינארית ובבסיס הסטנדרטי שהצגנו היא

מתאימה למטריצת יעקובי $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

דוגמה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה, $\overset{\text{פרמטר}}{t_0}\in(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, אז

$T_{t_0}\mathbb{R}=\{\frac{d}{dt}\}$ נסמן $\gamma=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ אז $D_{t_0}\gamma: Sp(\frac{d}{dt})\to Sp\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix}$ "γ'"

$$[D_{t_0}\gamma]=\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{df_n}{dt}\end{pmatrix}_{t_0}.$$

הגדרה: תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה $\overbrace{\text{רגולרית}}$ שעוברת דרך $x\in\mathbb{R}^n$ ($\gamma(t_0)=x$), נגדיר וקטור

משיק ל-γ בנק' x_0 כווקטור $\gamma'(t_0)$.

עקומות רגולריות ייקראו שקולות ב-x_0, $\gamma\sim\tilde\gamma$ אם $\gamma'(t_0)=\tilde\gamma'(t_1)$.

וקטור משיק ל-γ ב-x_0 יהיה מחלקת שקילות של עקומות רגולריות.

מרחב משיק " = אוסף מחלקות השקילות " " " ".

משפט אלו 2 הגדרות שקולות. לא נוכיח.

הגדרה עקומה רגולרית גיאומטרית -

2 עקומות פרמטריות רגולריות $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ שקולות

אם קיימת $\varphi:[a,b]\to[c,d]$, $\varphi'>0$, $\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi$. עקומה רגולרית

גיאומטרית - מחלקת שקילות.

הגדרה מטריקה רימנית ב-$U\subseteq\mathbb{R}^n$ זאת משפחה חלקה של תבניות

חיוביות לחלוטין, $\{g_{ij}(x)\}$