W7D2
8/12/14

גיאו' לא אוקלידית

ראינו
יחס הצלבה (יחס אנהרמוני)

$$D(\underbrace{z_{1,2,3,4}}) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

ל- $z_i \neq z_j$ ועם הגדרה מתאימה ב- ∞ (ברור איך להרחיב).

ראינו למה: D אינווריאנטי ל- $M(\mathbb{C})$.

למה: $D\in\mathbb{R}$ אמ"מ $z_{1,\dots,4}$ על מעגל מוכלל.

כעת נוכיח למה: $D>0$ אמ"מ $[z_1,z_2]$ ~~...~~ מופרד מ-$[z_3,z_4]$ על המעגל שלהן (z_3,z_4 מבדיל בין z_1,z_2) [$D<0$ אמ"מ לא מבדיל]

הוכחה עפ"י טרנס' מביוס נוכל להסתכל על $\hat{\mathbb{R}}$ במקום מעגל מוכלל שרירותי, ולקבוע $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\infty$ אז $D=\frac{1-z_4}{-z_4}=1-\frac{1}{z_4}$

וזה אכן חיובי אמ"מ $z_4>1$ או $z_4<0$.

למה $D>1$ אמ"מ z_3,z_4 לא מבדיל בין z_1,z_2 ו- $z_1z_2z_3z_4$ בסדר ציקלי.

הוכחה זה בדיוק המקרה $z_4<0$ בהוכחה הקודמת.

הערה כש- $z_2\to z_1$ $D\to 1$ ולכן טבעי להגדיר $D=1$ כשיש שוויון.

גיאומטריה היפרבולית בדיסק

למה יהי $B\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ דיסק פתוח, ∂B מעגל. לכל $z_1\neq z_2$ קיים ויחיד מעגל אינווריאנטי לשיקוף ב-∂B. יתר על כן, בצורה ישרה הוכחה: בשביל $\hat{\mathbb{R}}$-

הגדרה דיסק פתוח ב- $\hat{\mathbb{C}}$ נקרא מישור היפרבולי. קווים ישרים הם מעגלים אינווריאנטיים לשיקוף ב-∂B.

תוצאה: דרך כל 2 נק' במישור היפרבולי קיים ויחיד קו ישר.

הגדרה מרחק במישור היפרבולי $\rho(z_1,z_2)$ נתון ע"י $\log D(z_1,z_2,z_3,z_4)$ כאשר z_3,z_4 חיתוך הקו בין z_1,z_2 ל-∂B מסודרות כך ש- $D>1$.

למה $\rho(z_1,z_2)\geq 0$ שוויון אמ"מ $z_1=z_2$. $\rho(z_1,z_2)=\rho(z_2,z_1)$. ברור ממה שכבר יודעים על D ומהגדרת ρ. האקסיומה המעניינת יותר - א"ש משולש. לשם כך נרצה להעביר 3 נק' למקום שנוח לנו ע"י טרנספורמציית מביוס ששומרת את הדיסק במקום.

הגדרה ל- $B\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ מישור היפרבולי (כלומר, דיסק פתוח) נסמן את $MIso^+(B)\subseteq M(\hat{\mathbb{C}})$ טרנספורמציות עם $\varphi(B)=B$.

נתאר מפורשות את $MIso^+(B)$ - ל- B (כלשהו הנוני)

משפט 1 $MIso^+(\mathbb{H})$ זה בדיוק $\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\right\}$. (הוכחנו

משפט 2 $MIso^+(\Delta)$ זה בדיוק $\left\{\varphi\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid |a|<1, |\varphi|=1\right\}$. (במרוכבות!

הוכחה 1 א. תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ב- $SL(2,\mathbb{R})$. נוכיח $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ שומרת על $\mathbb{H}$. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ולכן ישר ממש' הוא איזומטריה!

כעת, $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{1}{2i}(\lambda-\bar{\lambda})$ כאשר $\lambda=\varphi(z)$ זה

$\frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)$ וזה נותן בסוף $=\frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}$

$\mathrm{Im}\, z\cdot\frac{1}{|cz+d|^2}>0$ ו- $\mathbb{H}$ אכן נשמר.

ב. נניח $\varphi\in MIso^+(\mathbb{H})$ כאשר $\varphi=\frac{az+b}{cz+d}$ ו- $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$.

φ שומר על $\mathbb{H}$ ולכן על $\hat{\mathbb{R}}$ השפה של $\mathbb{H}$. נבחר

$z=0,1,\infty$ ונקבל 3 משוואות, שפתרונן בהכרח

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ עם $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\pm1$. אבל אותו חישוב

של א' אומר שהוא בהכרח $+1$.

הוכחה 2 - א. תהי $\varphi(z)=\varphi\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ כמו במשפט, ונוכיח $\varphi(\Delta)=\Delta$.

נוכיח ש- φ שומרת על מעגל ושולחת את 0

לפנים של המעגל - אם $|z|=1$ אז

$|\varphi(z)|=\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}=\frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}z\bar{z}|}=1$ ו- $|\varphi(0)|=\left|\frac{0-a}{1-0}\right|=|a|<1$.

ב. נניח $\varphi\in MIso^+(\Delta)$ תרגיל!, גם ככה אפשר להסיק

מה' של משפט 1.

משפט לכל $z_1\neq z_2\in\Delta$ קיימת $\underbrace{\varphi\in MIso^+(\Delta)}_{\text{יחידה}}$ ששולחת את z_1 ל- $\varphi(z_1)=0$

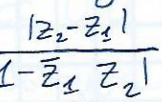
ו- $\varphi(z_2)=t>0$.

הוכחה ניקח $a=z_1$ ו- α כך ש- $\varphi(z_2)>0$ ~~$\left[\alpha=\frac{|z_2-z_1|(1-\bar{z}_1z_2)}{(z_2-z_1)|1-\bar{z}_1z_2|}\right]$~~

[במפורש, $\varphi=\frac{\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_1}{1-z_1\bar{z}_2}}{\frac{|\bar{z}_2-\bar{z}_1|}{|1-z_1\bar{z}_2|}}=\frac{(\bar{z}_2-\bar{z}_1)|1-z_1\bar{z}_2|}{|z_2-z_1|(1-z_1\bar{z}_2)}$]. ברור שזו האופציה היחידה.

מסקנה $\rho(z_1,z_2)=\rho(0,t)$

לפי נוסחה $t=\frac{|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|}$ ולכן $\rho(z_1,z_2)=\log\frac{1+t}{1-t}$

הוכחה -  ולכן $D(z'_{1,2,3,4})=\frac{-1\cdot(t+1)}{1\cdot(t-1)}=\frac{1+t}{1-t}$.

הגדרה $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

מה $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1,z_2)\right)=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|$, $\cosh(\rho(z_1,z_2))=\frac{2|z_1-z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}+1$.

<u>הוכחה</u> תרגיל אלמנטרי מהמסקנה הקודמת (לוגריתם ואקספוננט יתבטלו...).

<u>הגדרה</u> <u>משולש היפרבולי</u> הוא חיתוך <u>קומפקטי</u> של 3 חצאי מישורים היפרבוליים.
במישור היפרבולי מסוים.

<u>משפט</u> (זוויות בין משיקים, כרגיל). אז:

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha}=\frac{\sinh b}{\sin\beta}=\frac{\sinh c}{\sin\gamma}$$ [משפט סינוסים]

$$\cosh c=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$ [משפט קוסינוסים 1]

$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos\gamma.$$ [משפט קוסינוסים 2]

<u>הוכחה</u> נוכיח רק את cos2, כל היתר מוכחים באופן דומה אבל רק את המשפט הזה נצטרך בשביל א"ש משולש.

ניקח $\varphi\in MIso^+(\Delta)$ שתעביר C ל-0 ו-$A>0$. נקבל

לפי נוסחה $\cosh c$ שווה ל- $\frac{2|AB|^2}{(1-a^2)(1-b^2)}+1$ (מסמן מרחק אוקלידי), וגם

לפי משפט ~~$\frac{2(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)}{(1-a^2)(1-b^2)}+1$~~ קוסינוסים של גיאומטריה אוקלידית)

$$1+\frac{2(|AC|^2+|BC|^2-2|AC||BC|\cos\gamma)}{(1-|AC|^2)(1-|BC|^2)}=\frac{|AC|^2|BC|^2+|AC|^2+|BC|^2+1-4|AC||BC|\cos\gamma}{(1-|AC|^2)(1-|BC|^2)},$$ כעת.

$$\cosh a=\frac{1}{2}\left[\cancel{\exp\log}\frac{1+|BC|}{1-|BC|}+\cancel{\exp\log}\frac{1-|BC|}{1+|BC|}\right]=\frac{1+|BC|^2}{1-|BC|^2}.$$

ובדומה $\cosh b=\frac{1+|AC|^2}{1-|AC|^2}$, $\sinh a=\ldots=\frac{2|BC|}{1-|BC|^2}$, $\sinh b=\frac{2|AC|}{1-|AC|^2}$.

קל להציב ולראות שיש שוויון. $\boxed{\text{קס"ם היפרבולי}}$

<u>מסקנה</u> $c\le a+b$ ו- $c=a+b$ אמ"מ $C\in AB$.

<u>הוכחה</u> cosh עולה ו- $\cosh(c)\le\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b=\cosh(a+b)$.
שוויון אמ"מ $\gamma=\pi$, כלומר $C\in AB$, כי רק אז $\cos\gamma=-1$.

<u>מסקנה</u> ρ מרחק וקווים ישרים היפרבוליים נותנים מרחק קצר ביותר בין 2 נק', לפי ρ.

<u>משפט</u> $MIso^+(H)=Iso^+(H)$.

<u>הוכחה</u> נניח $\varphi\in Iso^+(H)$. אז φ קונפורמלית לפי cos2. ניתן להרחיב באופן רציף את φ ל- $\hat{\mathbb{R}}=\partial H$ ולכן לכל $\mathbb{R}$ מרימן-שוורץ, ע"י $\overline{\varphi(\bar{z})}$. לכן היא בהכרח טרנספורמציית מביוס.