V6DZ 1/12/14

a-b-c e
c-f-g

209 השריבר $9^{00}-12^{00}$

ג'יאומטריה לא-אוקלידית

תזכורת: שיעור השלמה בשישי 5/12

איפה עצרנו בפעם שעברה? $\mathbb{H}_1=\{|q|=1\}$.

משפט $A(\mathbb{H})\cap U(2)=A(\mathbb{H}_1)=SU(2)$.

הוכחה:

(1) אם $A(q)\in U_2$ אזי $|q|=1$ ולהפך.

(2) $A(\mathbb{H}_1)\subseteq SU(2)$ כי $\det A(q)=|q|^2=1$. למה $SU(2)\subseteq A(\mathbb{H}_1)$? ניקח

$A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SU(2)$ אז $\bar{A}^t=\begin{pmatrix}\bar\alpha&\bar\gamma\\ \bar\beta&\bar\delta\end{pmatrix}$ ו- $A\bar{A}^t=I$ נותן $\bar\alpha\underline{\underline{\gamma}}+\beta\underline{\underline{\delta}}=0$

ו- $\det A=1$ נותן $\alpha\underline{\underline{\delta}}-\underline{\underline{\gamma}}\beta=1$. זו מערכת ליניארית ב- γ,δ

שפתרונה $\gamma=-\beta$, $\delta=\bar\alpha$ ולכן $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ -\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}=A(z+jw)$
(בפרט $\mathbb{H}_1\cong S^3$)

נתבונן בהצגה נוספת של $\mathbb{H}$

הגדרה $\mathbb{H}_0=\{x\in\mathbb{H}\mid\bar{x}=-x\}\cong\mathbb{R}^3$, קווטרניונים מדומים.
$x=bi+cj+dk$

הגדרה לכל $q\in\mathbb{H}_1$ נגדיר $\alpha_q(\xi)=q\xi q^{-1}$. למה רק ל- $\mathbb{H}_1$? - אדיש לכפל בסקלר הפיך ולא מוגדר ב- 0).

למה $\alpha_q(\mathbb{H}_0)\subseteq\mathbb{H}_0$.

הוכחה יהי $x\in\mathbb{H}_0$, $\overline{\alpha_q(x)}=\overline{qxq^{-1}}=\overline{qx\bar{q}}=\bar{\bar{q}}\,\bar{x}\,\bar{q}=-qx\bar{q}=-qxq^{-1}=-\alpha_q(x)$.

תוצאה $\alpha:\mathbb{H}_1\to GL(\mathbb{H}_0)$

משפט (1) העתקה זו היא הומומורפיזם.
[הערה: זו כבר העתקה א' - פריקה, כי $Im=SO(3)$]

(2) $Im(\alpha)=SO(3)$.

(3) $Ker(\alpha)=\{\pm 1\}$

בפרט, $\frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}\cong SO(3)$.

הוכחה (1) מהגדרה $\alpha(q_1q_2)=\alpha(q_1)\alpha(q_2)$.

ברור ש- $Im(\alpha)\subseteq SO(3)$ כי $|\alpha_q(x)|=|qxq^{-1}|=|q|\cdot|x|\cdot|q^{-1}|=|x|$ וע"י בחירת בסיס קל לראות שזה משמר אורינטציה (אורתוגונליות, התמונה חייבת להיות רכיב קשירות של $O(3)$ ו- $I\in SO(3)\cap Im$.

(2) $SO(3)\subseteq Im(\alpha)$ איבר ב- $SO(3)$ הוא סיבוב לגבי ציר = הרכבה של שיקופים לגבי 2 מישורים.

למה העתקה $\psi_q(x)=-qxq^{-1}$ שיקוף לגבי מישור אורתוגונלי ל- q.

לכן כל שיקוף הוא ... $q_1(q_2xq_2^{-1})q_1^{-1}=q_1q_2xq_2^{-1}q_1^{-1}$

וזה בדיוק $\varphi_{q_1}(\varphi_{q_2}(x))=\varphi_{q_1q_2}(x)$.

<u>הוכחת הלמה</u> $a\perp b \iff ab+ba=0$ לכל $a,b\in\mathbb{H}_0$, כי

$$(a,b)=\frac{|a+b|^2-|a|^2-|b|^2}{2}=\frac{(a+b)(\bar a+\bar b)-a\bar a-b\bar b}{2}=\frac{a\bar b+b\bar a}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(ab+ba)$$

ולכן $(a,b)=0$ אמ"מ $ab+ba=0$.

כעת, כדי להוכיח שזה שיקוף ביחס למישור אורתו', מספיק

ש- $\varphi_q(q)=-q\cdot q\cdot q^{-1}=-q$ ושנק' שבת של φ_q הן בדיוק

x-ים כך ש- $-qxq^{-1}=x$, כלומר $-qx=xq$, אז $xq+qx=0$ אז $(x,q)=0$

אז $q\perp x$ - כלומר בדיוק המישור האורתוגונלי ל-q.

(3) יהי $q\in\ker\varphi$, כלומר $\varphi_q(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{H}_0$. ברור

ש- $q=\pm1$ מקיימים זאת. בכיוון שני ניקח $x=i$. אז נקבל

ש-x נקודת שבת, $qiq^{-1}=i$ אז $qi=iq$, כלומר

$(a+bi+cj+dk)i=i(a+bi+cj+dk)$ | ולכן $c=d=0$. בדומה ל- $x=j$ נקבל

$ai-b-ck+dj=ai-b+ck-dj$ | שגם $b=0$, ולכן q קווטרניון

ממשי עם ערך מוחלט 1, ולכן $q=\pm1$.

<u>מסקנה</u> קיים הומו' $SU(2)\to SO(3)$ על עם גרעין $\{\pm I_d\}$

<u>מסקנה</u> $SU(2)\cong\mathbb{H}_1\cong S^3$ ולכן $SO(3)\cong\frac{S^3}{\{\pm1\}}\cong\mathbb{R}P^3$.

טרנספורמציות מביוס

<u>הגדרה</u> $S_r(a)\subseteq\mathbb{R}^n$ ספרה ברדיוס r עם מרכז a. נגדיר "שיקוף"

(אינוורסיה) לגבי הספרה הזו - $\varphi(x)=a+\frac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}$.

גיאומטרית, אינוורסיה מעבירה את x לאותו ישר $[a,x]$

במרחק שמקיים $|x-a||\varphi(x)-a|=r^2$. בפרט, נק' שבת הן בדיוק

הספרה.

דוגמה. $S_1(0)$ תיתן $\varphi(x)=\frac{x}{|x|^2}$.

נשים לב שאינוורסיה כאן לא מוגדרת ב-a!

ע"י העתקה סטריאוגרפית

נרחיב את $\mathbb{R}^n$ עד $\hat{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ (קומפקטיפיקציה חד נקודתית),

ונגדיר את φ ב-$\{a,\infty\}$ בתור $\varphi(\infty)=a$, $\varphi(a)=\infty$. נקבל העתקה

חח"ע ועל ורציפה, (ולמעשה אפילו חלקה).

<u>תוצאה</u> על ההשלמה $\hat{\mathbb{R}}^n$, φ טרנספורמציה, (כלומר חח"ע ועל).

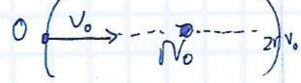
כעת נרצה למצוא עוד טרנספורמציות של $\hat{\mathbb{R}}^n$

שיקופים לגבי [על-] מישורים - "ספירה שעוברת באינסוף" היא על

מישור ולכן נקבל הרחבה טבעית של ~~[illegible]~~ שיקופים ל-$\hat{\mathbb{R}}^n$

(נניח בה"כ $|v_0|=1$)

ניקח נקודה (לשם פשטות הראשית) וכיוון v_0, ונגדיל ספירות מהצורה



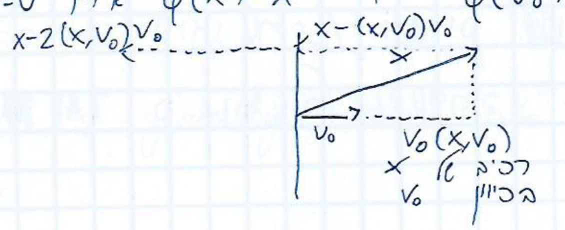
$\varphi(x)=\lim_{r\to\infty} rv_0 + \frac{r^2}{|x-rv_0|^2}(x-rv_0) =$ עם r. נקבל

$$\lim_{r\to\infty} rv_0 + \frac{1}{|\frac{x}{r}-v_0|^2}(x-rv_0) = \lim_{r\to\infty} rv_0\left(1-\frac{1}{|\frac{x}{r}-v_0|^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{|\frac{x}{r}-v_0|^2}x}_{\downarrow r\to\infty \ x} =$$

$$x+\lim_{r\to\infty} rv_0\,\frac{-2\frac{(x,v_0)}{r}+\frac{x^2}{r^2}}{1-2\frac{(x,v_0)}{r}+\frac{x^2}{r^2}} = x-2(x,v_0)\cdot v_0$$

שיקוף לגבי מישור דרך הראשית אורתוגונלי ל-v_0, (משל) כי

$\varphi(v_0)=v_0$ - ו $\varphi(x)=x$ אם $(x,v_0)=0$. באופן כללי



הגדרה חבורת טרנספורמציות של $\hat{\mathbb{R}}^n$ היא חבורת Möbius $GM(n)$ הנוצרת ע"י שיקופים לגבי $\underbrace{\text{ספירות ועל-מישורים}}_{\text{ספירות מוכללות}}$

למה 1 כל שיקוף לגבי ספירה מוכללת הוא אינבולוציה (הופכי לעצמו). תרגיל קל.

למה 2 $Iso(\mathbb{R}^n) \subsetneq GM(n)$ כי כל איזומטריה היא הרכבה של שיקופים לגבי על מישורים (כאשר לכל $\varphi\in Iso(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $\varphi(\infty)=\infty$ כדי להפוך אותה לטרנספורמציה על $\hat{\mathbb{R}}^n$. שיקוף ביחס לספירה אינו איזומטריה של $\mathbb{R}^n$ ולכן ההכלה היא ממש.

למה 3 כל טרנספורמציית מביוס שומרת ספירות מוכללות (ספירה מוכללת $\downarrow$ ספירה מוכללת)

הוכחה מספיק לבדוק לשיקוף לגבי על-מישור (טריוויאלי, כי זו איזומטריה) ולגבי ספירה.

עבור ספירה, מספיק להוכיח עבור $S_1(0)$. ניקח ספירה מוכללת $\varepsilon|x|^2-2(x,v_0)+t=0$. ההעתקה היא $y=\frac{x}{|x|^2}$ או $x=\frac{y}{|y|^2}$ כי זו אינבולוציה. אז $\varepsilon\frac{|y|^2}{|y|^4}-2\left(\frac{y}{|y|^2},v_0\right)+t=0$ ולאחר כפל ב-$|y|^2$ נקבל ספירה מוכללת $\varepsilon-2(y,v_0)+t|y|^2=0$.

למה 4 טרנספורמציות מביוס הן העתקות קונפורמליות (שומרות זוויות). תרגיל (חשוב).

הגדרה $M(n)\le GM(n)$ חבורת טרנספורמציות מביוס שומרות אוריינטציה, כלומר הרכבות של מספר זוגי של שיקופים לגבי ספירות מוכללות.

טרנספורמציות מביוס במישור דו-מימדי

נזהה את $\mathbb{S}^2=\hat{\mathbb{R}}^2=\hat{\mathbb{C}}$ ספירת רימן (למשל גם $\mathbb{CP}^1$), ע"י ההתאמה

של $x,y \longmapsto z,\bar{z}$.

משפט 1 $GM(\hat{\mathbb{C}})$ נוצרת ע"י הטרנספורמציות הבאות:

(א) הזזות $z \mapsto z+a$ לכל $a\in\mathbb{C}$.

(ב) הומותטיות $z\mapsto \beta z$ לכל $\beta>0$.

(ג) סיבובים $z\mapsto \lambda z$ לכל $\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש-$|\lambda|=1$.

(ד) הצמדה $z\mapsto \bar{z}$. (שיקוף ביחס לציר הממשי).

(ה) אינוורסיה $z\mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. (שיקוף ביחס למעגל היחידה).

<u>הוכחה</u> תרגיל. צריך להוכיח שכ׳ טרנספורמציית מביוס (היא הרכבה של 2 שיקופים ביחס לספרות קונצנטריות), וצריך ליצור מא׳ ג׳ וד׳ כל איזומטריה, ומא׳ ב׳ וה׳ כל אינוורסיה.