W4D2

17/11/14

גיאומטריה לא אוקלידית

גיאומטריה ספירית - המשך

הגדרה $A,B\in S^2$, נסמן $\rho(A,B)$ אורך קשת קצרה של מעגל גדול דרך A,B. ברור $\rho(A,B)=\rho(B,A)$, $\rho(A,B)\geq 0$ ושוויון אמ"מ $A=B$. את אי"ש המשולש נוכיח בעזרת משפט הקוסינוסים - $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$.

מסקנה $a\leq b+c$ - שוויון רק במשולש מנוון. $a+b+c\leq 2\pi$ - שוויון רק במשולש מנוון.

הוכחה $\cos a\geq\cos b\cos c-\sin b\sin c=\cos(b+c)$ ולכן $a\leq b+c$.

לכן ρ מקיים אקסיומות של מרחק. לכן למשל לכל קו שבור ב-S^2 $A=C_0,C_1,\dots,C_n=B$ מתקיים $\sum_{i=0}^{n-1}\rho(C_i,C_{i+1})\geq\rho(A,B)$ שוויון כאשר כל הנק' על מעגל גדול. לכן גם על מעגל גדול מתקבל המרחק הקצר ביותר בין 2 נקודות, מבין כל הקווים השבורים ביניהן.

הגדרה אם $\gamma:[\alpha,\beta]\to S^2$ חלקה למקוטעין האורך שלה הוא $l(\gamma)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(C_i,C_{i+1})$. (משפט שלא נראה כאן - אורך מוגדר היטב וקיים תמיד).

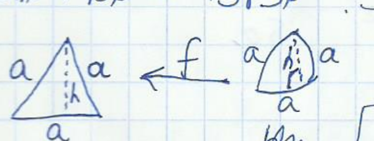
$C_0=\gamma(\alpha)$, $C_n=\gamma(\beta)$, $C_i=\gamma(t_i)$, $\alpha<t_1<\dots<t_{n-1}<\beta$, $\max_i\rho(C_i,C_{i+1})\to 0$

מסקנה קשת על מעגל גדול היא מרחק הכי קצר בין 2 נק', מבין כל העקומות החלקות למקוטעין.

משפט (מישור וספירה אינם איזומטריים מקומית). לכל $U\subset S^2$ פתוחה, אין $f:U\to\mathbb{R}^2$ איזומטריה.

בגיאומטריה דיפרנציאלית - עם עקמומיות. אצלנו - בכלים אלמנטריים.

הוכחה ניקח משולש שווה צלעות ב-U.



אבל ב-$\mathbb{R}^2$ $h=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ וב-S^2 $\cos a=\cos h\cos\frac{a}{2}$. אם היה שוויון ה"ט מקבלים $\cos a=\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\cos\frac{a}{2}$

ובפיתוח טיילור

$1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}-\dots\neq 1-\frac{a^2}{2}+\frac{3a^4}{64}-\dots$

איזומטריות של הספירה

הגדרה $Iso(S^n)=\{f:S^n\to S^n \text{ שומרות } \rho\}$.

משפט $Iso(S^n)=\{f|_{S^n},\ f\in O(n+1)\}$

הוכחה ברור שכל מטריצה אורתוגונלית מעתיקה $S^n\to S^n$ שומרת

מעגלים גדולים ולכן מרחקים.

נראה שכל איזו' היא מצורה כזו. ניקח $\varphi \in Iso\, S^n$ ונרחיב ל- $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ באופן טבעי. אז $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ איזו'$^{(*)}$ ולכן מהצורה $f(x)=Ax+b$ ל- $A\in O(n+1)$

אבל $f(0)=0$ ולכן $b=0$ ו-f כשוו טרנספורמציה אורת',

ולכן φ טרנספורמציה אורת' מצומצמת ל-S^n.

למה (*) נכון? $(f(x),f(y)) = |x||y|\left(\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right),\varphi\left(\frac{y}{|y|}\right)\right) = |x|\cdot|y|\cdot\cos\left(\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right),\varphi\left(\frac{y}{|y|}\right)\right)$

$= |x||y|\cos\left(\frac{x}{|x|},\frac{y}{|y|}\right) = |x||y|\cos(x,y) = (x,y)$

φ שומרת זוויות.

חבורות דיסקרטיות ב- $Iso^+(S^2)$

למה: $G<Iso(S^2)$ דיסקרטית $\iff$ G סופית.

הוכחה: $\Rightarrow$ ברור, $\Leftarrow$ מקומפקטיות (תרגיל).

משפט: עד כדי הצמדה ב-$O(3)$, כל חבורה דיסקרטית $G\subset SO(3)$ היא איזומורפית לאחת החבורות הבאות:

(1) חבורה ציקלית סופית.

(2) דיהדרלית.

(3) 3 חב' מיוחדות - [חבורות ארבעון, קוביה, ואיקוסהדרון].

הוכחה נסתכל בקבוצה $\Gamma=\{(g,x) \mid g\in G\setminus\{id\},\ g(x)=x\}$ תת קבוצה של $G\times S_2$.

$\pi_G:\Gamma\to G$, $(g,x)\to g$. ברור שהיא לא על כי אין מקור ל-id.

טענה אם ניקח $G\setminus\{id\}$ זה על, כי כל סיבוב ב-$SO(3)$ הוא סביב ציר כלשהו, עליו יש 2 נק' על הספירה.

לכן $|\Gamma|=2(|G|-1)$. $X=\{x\in S^2 \mid \exists g\in G,\ g(x)=x\}$

נסתכל על ההטלה $\pi_{S^2}:\Gamma\to$, על לפי הגדרה לכל $x\in X$.

$|St_G(x)|>1$ $\nu(x)$ לכל $y\in G_x$ $\nu(x)=\nu(y)$ (כי המייצבים צמודים) ולכל $x\in X$, $g(x)\in X$,

ונספור מסלולים - מ"צב $|G_x|=\frac{|G|}{|St_G(x)|}=\frac{|G|}{\nu(x)}$ - ולכן

$|\Gamma|=\sum_{x\in X}|St_G(x)|-1=\sum_{\text{מסלולים ב-}X}|G_x|(\nu_x-1)$ ולכן זה שווה $2(|G|-1)=\sum_{\text{מסלולים}}\frac{|G|}{\nu(x)}(\nu(x)-1)$.

מחלקים ב-$|G|$ ומקבלים $\sum_{\text{מסלולים}}1-\frac{1}{\nu(x)}=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)$ כיוון ש- $1-\frac{1}{\nu(x)}\geq\frac{1}{2}$ יש

פחות מ-4, וחייב להיות יותר מ-1 כי $1-\frac{1}{\nu(x)}<1<2-\frac{2}{|G|}$.

נחלק למקרים אם יש 2 או 3 מסלולים.

2 מסלולים ← $2-\frac{1}{\nu_x}-\frac{1}{\nu_y}=2-\frac{2}{|G|}$. $|G|=\nu_x=\nu_y=n$ ו- $n\ge 2$.

G ציקלית סופית, נוצרת ע"י סיבוב בזווית $\frac{2\pi}{n}$

ריצוף מתאים

3 מסלולים ← $3-\frac{1}{\nu_x}-\frac{1}{\nu_y}-\frac{1}{\nu_z}=2-\frac{2}{|G|}$.

פתרונות אפשריים – (עד כדי סידור מחדש)

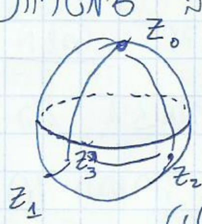
סיבוב של π במישור 1

נוצרת ע"י סיבוב $\frac{2\pi}{n}$ והמישור המאונך.

	ν_x	ν_y	ν_z	$\lvert G\rvert$
דיהדרלית –	2	2	n	2n
ארבעון –	2	3	3	12
קוביה –	2	3	4	24
איקוסהדרון –	2	3	5	60

דיהדרלית –

נראה למשל ש- $|G|=12$ מתאים בדיוק לחב' סימטריות של ארבעון. $\nu_z=3$ אז יש מסלול מאורך 4. בהכרח קדקודים של ארבעון משכלל.



מסלול נוסף – מרכזי פאות (פאון דואלי).

אמצעי הצלעות (של 2 הפאונים) – מסלול שלישי.

ריצוף של חבורה מתאים לפאון דואלי.

משטחים חלקים כמנה של ספירה S^2

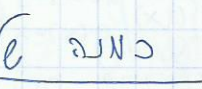
S^2 כמנה טריוויאלית.

<u>טענה</u> חבורה דיסקרטית G מגדירה משטח חלק ע"י דיפאומורפיזם מקומי אמ"מ אין ל-$id\neq g\in G$ נק' שבת.

לכל סיבוב יש נק' שבת ולכן נשאר רק שיקוף. $S^2/\{id,-id\}=\mathbb{RP}^2$ לא ניתן לשכן ב-$\mathbb{R}^3$ כי הוא לא אוריינטבילי ($-id$ שובר אוריינטציה).

איזומטריות, מספרים מרוכבים וקווטרניונים

(1) מספרים מרוכבים $\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. לכל מספר יש צמוד $\overline{z}$: $\overline{a+ib}=a-ib$.



$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

<u>הגדרה</u> – $\varphi:\mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R})$ ע"י $z\mapsto z\cdot(*)$, כלומר $a+ib=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$.

קל לראות שזו הצגה של $\mathbb{C}$ ממעלה 2 (מעל $\mathbb{R}$). כמו כן $\varphi(\bar z)=\varphi(z)^t$

$\det\varphi(z)=|z|^2>0$ ולכן כפל ב-z <u>איזומטריה</u> שומרת

סימון אחר: $|z|=1$ אז ש' איזו' בין $G=\{|z|=1\}\cong S^1$ ל- $SO(2)$.
באופן כללי האיזו' של $\mathbb{C}$ נוצרות ע"י כפל ב- $z\in\mathbb{C}$, חיבור $z\in\mathbb{C}$ והצמדה.

(2) <u>קווטרניונים</u>

<u>הגדרה</u> $\mathbb{H}=\{a+ib+jc+kd \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ כאשר $i^2=j^2=k^2=-1$ ו-
$ij=k=-ji$, $jk=i=-kj$, $ki=j=-ik$.
לא שדה כי אין חילופיות אבל זו <u>אלגברה אסוציאטיבית</u>.
נראה בהמשך שזו גם <u>עם חילוק</u>.
לכל $q\in\mathbb{H}$ ($=a+ib+jc+kd$) ניתן להגדיר צמוד $\bar{q}=a-ib-jc-kd$, נורמה $|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ ו- $q\cdot\bar{q}=|q|^2$. לכן לכל q קיים הופכי $q^{-1}=\frac{\bar{q}}{|q|^2}$.
אפשר לחשוב על $\mathbb{H}$ כהרחבה של $\mathbb{C}$ ע"י איבר אחד, למשל j.
לכן נקבל הצגה של $\mathbb{H}$ ממעלה 2 מעל $\mathbb{C}$ וממעלה 4 מעל $\mathbb{R}$.
$q=a+ib+jc+kd=(a+ib)+(c+id)j=(a+ib)+j(c-id)$

הצגה מרוכבת $A: q=a+bi+cj+dk=z+wj \xrightarrow[\text{מטריצת כפל מימין } x\to x\cdot q]{} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}$ (כי $jz=\bar{z}j$ לכל $z\in\mathbb{C}$).
$(x_1\ x_2)\to(x_1\ x_2)A(q)$
אז $A(q_1q_2)=A(q_1)A(q_2)$ (לפי אסוציאטיביות) וכמו קודם ברור ש- $A(q_1+q_2)=A(q_1)+A(q_2)$.
כמו כן $A(\bar{q})=\overline{A(q)}^t$ (כי $\bar{q}=\bar{z}-wj$) $A\cdot A^t=I$, בדומה (?) למרוכבים, $\det(A(q))=|q|^2$
ו- $\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2$.

<u>איזומטריות של כפל ב-q</u> - מטריצות יוניטריות מעל $\mathbb{C}$ עם דטרמיננטה 1.
מתאימות לכפל מאיברים מ- $\mathbb{H}_1=\{q\in\mathbb{H} \mid |q|=1\}\cong S^3$
חבורה לפי כפל, כי $|q_1||q_2|=|q_1q_2|$.

<u>משפט</u> קווטרניונים ואיזומטריות ב- $\mathbb{C}^2$ - $A(\mathbb{H}_1)=SU(2)$ ($=A(\mathbb{H})\cap U(2)$),
כאשר $A:\mathbb{H}_1\to SU(2)$ איזומורפיזם. הוכחה בשיעור ~~הבא~~
אין שיעור, הוכחה בעוד שבועיים!