

W3D2
10/11/14

גיאומטריה דיפרנציאלית

שיעור השני: ה-5 בקצמך, ה-2-9 במקום השיעור הזה
סבוצים.

משפטים סטנדרטיים של $\mathbb{R}^2$

$G \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ כריסלוארפית, P תחום יסודי, $\mathbb{R}^2/G = P/\sim$ כאשר
 $\sim$ יחס שקילות שאולי מזהה נקודות שונות $x \sim y$ אם x ו- y הם נקודות
 מזהה P על $\mathbb{R}^2$ כך ש- $P \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ איז $1-G \rightarrow \text{Int } P$ חתך.

מה נקרא מרחב גאומטרי?

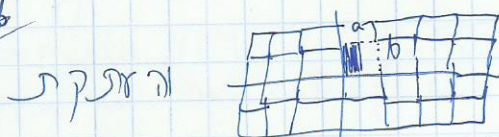
וירצות קו-מימדיות קומפקטיות = משפטים סטנדרטיים נרצב/קצת מדי
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ חתך משפטים סטנדרטיים. דיפאומורפיזם מקומי ואפילו גלובלי
 מקומית.

למה $\mathbb{R}^2/G$ משפטים סטנדרטיים חתך וההפך דיפאומורפיזם מקומי $\Leftrightarrow G \neq \text{id}$
 אין נק' שבת. כלומר G חבורת הצוות ופלישות בלבד.

הוכחה (ב) סיבה, למשל $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ מקומית הדחקה
 היא $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ והנשערת ב- $\mathbb{Z}$ מתמסרת. למשל, היא לא

חח'ז בלבד סביבה של $\mathbb{Z}$ $(x,y) \rightarrow (x,y)$ לא דיפרנציאלית (יש שפה
 (ב) שיקוף $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ סביבה כמחנה)

בכיון ג-א או ג-ב חבורת הצוות $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ואז
 $\mathbb{R}^2/G$ אירוס $\mathbb{Z}^2$, וקל לראות שההפך הוא דיפאומורפיזם (אזם איזו
 מקומית), או ג-א $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ואז גלובלי $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ או ג-א
 איז גלובלי ו- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ תחום יסודי נראה



הדחקה

הדחקה היא



ההפך דיפאומורפיזם מקומי ואפילו גלובלי

למה רק שני אלה נוסח נוסח - קונה שנתית מסדה
 למאמין אויזר $\int_M ds = \text{Vol}(M)$, ו- $\text{Vol}(M) = \int_M ds$ שפה מתאים לכך

גביעור אין עקמוניות. אלו בקיז "מלחם שלוחים" - חברי עקמוניות.
 יש גם משלים עם עקמוניות - למשל ספרה. זה מתאים לעקמוניות
 תיבות, ומאכן אולי שלה 2.
ג'ואמלריה ספרית

קיצורים (באריים) של ספרה, חבורות דסקטיות של (3) SO ופאליז
משאלים

הצורה פאון קמור הא קמור של קב' סופית של נקודות.
 נניח שקבוצת הנקודות אינה קו-פאטת לא כן באותו
 מישור) כך שהפאון יהיה תחת מחד.

קישור } פנימית - מישור תחת אלו קישור
 פאון } נק שפה - ק על מישור תחת

קצקוד - קישור קל, $q = K \cap L$

צלע קישור של, $e = L \cap L$

פאה מצולצ קמור...

משל אולי

יהי Π פאון קמור, V מס' קצקודים, E מס' צלעות.

F מס' פאות, אז $V - E + F = 2$, וזה $(\mathbb{Z}^2) \chi$.

הוכחה נעשה האלה סטריאומטרית מתקודה מאל פאה של פאון

אמור מתחת לפאון. נשים לב שפאה אחת עברה אחת

ואכן נצפה לקבל זכשן 2 במקום 1. בכל שלב מורידים

או צלע ופאה, או 2 צלעות קצקוד ופאה, עד שנות קצקוד

יחיד כ- צרס.

הצורה פאון קמור יקרא משול אם כל קצקוד ש"ק לאותו מספר

ח. פאות וכל פאה היא מצולע משולל עם אותה

מספר צלעות י' ושל 2 פאות חופפות י' אלו,

כל הצלעות מאותו אורך וכל (צויות וצויות מרחביות)

משל (s, r, F, E, V) ש"ק ארטימט פאה.

מבוא עץ ספרים $R=1$ קיום אל תשוב, כי זה עץ כדי הוויסטה. אפשר $R=1$

ניקח $\{x^2+y^2+z^2=R^2\} = S_R^2$ מעגל קטן - חיתוך ספרה עץ מישור דרך המרכז. משיי של מעגל קטן - 2 חצי ספרות. (כשנשתמש בחצי ספרות נקח סגור).

מבוא ספרי - חיתוך מספר סופי של חצי ספרות. כלל אפסות 2 כדי שלא יהיה מנוון. יש מבוא עץ



עץ 2 ~~מבוא~~ צלעות - קטן.

מחולק 3 צורות ישרות.



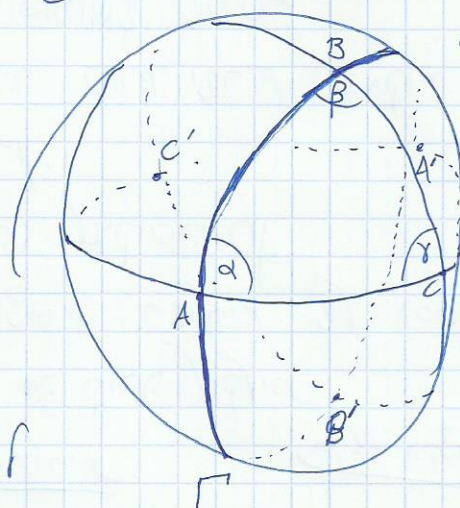
צורות מחזקת בין משיקלם מאונכים אחדים.

משפט שטח מחולק ספרי הוא $S' = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$ שטח מחולק. אמירה שטח $\frac{\pi R^2}{2}$, האינטי כי הוא מכסה $\frac{1}{8}$ שטח הכדור.

שטח חצי ספרה של π -

$$2\pi R^2 = S_{ABC} + S_{AB'C} + S_{A'B'C} + S_{A'B'C}$$

יוצרים ביחד קטן יוצרים ביחד קטן
בשטח $2\alpha R^2$ בשטח $2\beta R^2$



הוכחה

$$S_{ABC} + S_{A'B'C} = S_{ABC} + S_{ABC} = 2\gamma R^2$$

$$2\pi R^2 = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - 2S_{ABC}$$

אכן

ואחרי העברת גורמים נקבל את הנוסחה.

מסקנה אלא מבוא ספרי קטור $\sum \leq S_R^2$ ה קטורים עץ צורות $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$S_{\Sigma} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (\pi - 2) \right) R^2$$

נקבל ד" שריאטאלציה

מסקנה הוכחה אטלטיבית אפשר אחר:

ניקח n כאלו קטור ונטיל ע ספירה שארככה ק בתור הפאון

ועץ קיום קטן מספיק שלא יאצת בפאון. צלעות



דברות בקור אמזלים גדולים. נקבל חלקה של הספרה

אמבוא עץ ספרים עץ אולם מס קטורים / צלעות / כאלות.

$$4\pi R^2 = \sum_{i=1}^E S_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^E \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} - (\pi - 2) \right) R^2 = 2\pi V R^2 - 2\pi E R^2 + 2\pi F R^2$$

אכן $2 = V - E + F$ אספה עקמוניות $\frac{+1}{R^2}$ אכן נוסחה גאוס בונה

4abc

נותנת מאפיין אולי של 2.

זכשו מכלל אהוכים קיום דוקדוקון (איקוסהדרון):

סדרה קיים מחומש סביר שזה צלעות עם זוויות שוות
 $\frac{2\pi}{5}$ בכל קדקוד.

הוכחה איננה בין $\odot$ ל- $\odot$ יש כמה מחומשים
 מוצר מיחידות זה כפי הנראה הספירה שלח מחומש
 ככה $\frac{\pi}{3}$, בעצם $\frac{1}{2}$ משלח הספירה נעשה ריבוי
 של הספירה ע"י מחומשים כאלה -



האיחוד של 6 מחומשים מתן מכלול לא
 קאור בין 10 צלעות. מכל אהוכים מוצר מחומשים
 כאלו בשכבה אחת, ו-4 מוצר את הריבוי מקולי
 צלעות וזוויות במחומש שחסר
 זכשו, אם נעביר קווים ישרים במקום מצעים בקוים
 נקרא דוקדוקון.

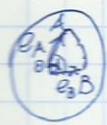
יש גם איסון זהה לאיקוסהדרון.

אכן זה בדיוק שקול לריבויים השלישי של הספירה - נושא
 אהוכים זכשו נראה מה קורה אוקיות

בלי הקצר יותר

גיאומטריה ספירית

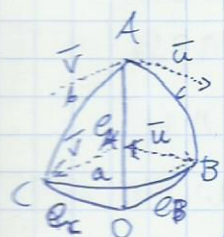
מרחק (מניקה) על ספירה S^2_1 - $A, B \in S^2_1$ לאורך מעט
 גדול $\rho(A, B) = \arccos(e_A, e_B)$



מעט יהי $T \subseteq S^2_1$ משולש סביר.

יש קשר בין α, β, γ שמתן α ע"י מעט הקוסנוס:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$



הוכחה: נסתכל על תמונת המישור מהמרחב

$$a = (e_B, e_C), b = (e_A, e_C), c = (e_A, e_B)$$

זוויות α, β, γ בין מישורים ונרצה שהם יהיו בין קאורים.

נאל אורתונורמליות על e_A את B, C ונקרא $(\vec{v}, \vec{u})$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}, \|\vec{u}\| = \sin \gamma, \|\vec{v}\| = \sin \beta, (\vec{u}, \vec{v}) = (e_B - e_A \cos \gamma, e_C - e_A \cos \beta)$$

$$(\vec{a}, \vec{r}) = \cos a - \cos c \cos b - \cancel{\cos b \cos c} + \cancel{\cos b \cos c}.$$

$$\boxed{\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos b \cos c = \cos a}$$

10/11/21