

3/11/14
W2 D2

גיאומטריה לא אוקלידית

השאלה: שער נתון אפיון איזומטריות של $\mathbb{R}^n$.

$$Iso(\mathbb{R}^n) = \{f(x) = Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}. \quad Tran(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow Iso(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n).$$

התחלנו לדבר על חבורות דיסקרטיות של איזומטריות $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ וראינו שחבורות דיסקרטיות של (מס) n זיקיות ושל (מס) n זיקיות/דיסקרטיות (מס) n .

משפט: יהי $\Gamma \leq Tran(\mathbb{R}^n)$ חבורה דיסקרטית. אז קיימים $u_1, \dots, u_m$

$$\Gamma \hookrightarrow G \rightarrow \tilde{G} \quad \text{כך ש-} \Gamma = \mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_m \quad \text{ו-} \tilde{G} \text{ נקרא דרגה של } \Gamma.$$

מקרה מיוחד: $m=n$. $Tran(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow Iso(\mathbb{R}^2)$

הוכחה: קיים סעיף מיוחד מימאלית ב- Γ , u_1 בתל ב- u_2 (מרחק $N = \text{Span } u_1$ וכו').

מקרה 1 - $u_1, \dots, u_m$ יוצרים את Γ

כאשר $m=n$ נאמר ש- Γ סריג, מדרגה n אה. $\Gamma = m$ אה.

השערה: $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ דיסקרטית נקראת קריסטלוגרפית אם $\Gamma = n$ אה.

אח"כ נראה השערה שקולה.

השערה: יהי $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ דיסקרטית וקיימים תמוז קמור וקומפקטי P ב- $\mathbb{R}^n$ כך

ש- $Int P \neq \emptyset$ ונת קיים:

$$(1) \quad \mathbb{R}^n = GP \quad (2) \quad \text{אם } g \in G \text{ ו-} gP \cap Int P \neq \emptyset \text{ אז } gP = P.$$

לומר: ב- P - g - ים השונים נכשיר אלי רק לאורך שפה. אפואים

דורשים תנאי חזק יותר (2) $gP \cap Int P \neq \emptyset$ אז $g = h$.

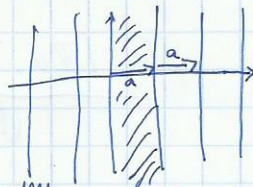
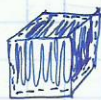
(1)-(2) - הפירוק $\mathbb{R}^n = \bigcup_{g \in G} gP$ נקרא אריזה (tiling) וכל חלק הוא tile.

א נקראת חבורה קריסטלוגרפית.

אולי 2 השערות שקולות.

דוגמה: $\{za\} \subset Iso(\mathbb{R}^2)$ אחבורה זו יש "ריבוע" אבל עם תמוזים לא קומפקטיים.

אולי חלק מוכחת השקלות בש"מ.



מסקנה: $\mathbb{R}^n / G$ הוא P ו- $\sim$ יחס כליסה על השפה (אם יש).

מיון: חבורות דיסקרטיות וקריסטלוגרפיות במישור (לא שאל):

(1) נניח $\Gamma = 0$, אז $G \leq O(2)$ נוצרת ע"י סיבוב או ב- (מס) ודיסקרטיות.

(2) $\Gamma \neq 0$, נאמן ש- G דיסקרטית עם כן. מספיק ש- G^+ סופית. יהי G_m

ג- $\tilde{G}^+$, ונניח $\Gamma = \mathbb{Z}a$, $R_{0,\alpha} T_\alpha R_{0,\alpha}^{-1} = T_{R_{0,\alpha}(\alpha)} \in G$, $\alpha=0$ כל $\alpha=0$ וכל $\alpha=\pi$

במקרה $\Gamma = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ כל $R_{0,\alpha}(b) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ואכן בעטים (a,b) כל $R_{0,\alpha}$ בעטים (e_1, e_2) מציבה היא $\mathbb{Z}$

$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. וכן $2\cos \alpha = m_{11} + m_{22} \in \mathbb{Z}$ וכן α אחד מבין $\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

זה משמר על המבנה קריסטלוגרפיות.

2. כל $\Gamma = \mathbb{Z}a$ ו- $\tilde{G} \subseteq SO(2)$, אז כל $\tilde{G}$ טריוויאלית $\tilde{G}$ (ואם נקבל $\mathbb{Z}a$ חבורת הסגורות (הזמניות) או $\langle R_{0,\alpha} \rangle$ ואם נקבל חבורה $\tilde{G}$)

$\tilde{G} = \{ \mathbb{Z}a, R_{\frac{n\pi}{2}} \}$. $gx = \pm x + na$ סיבוב סביב $\frac{n\pi}{2}$.

(אין צורך כי $R_{\frac{n\pi}{2}} R_{\frac{m\pi}{2}} x = x + na$ וכן $\tilde{G} = na$).

אם $\tilde{G} \not\subseteq SO(2)$, נניח $S_\ell \in \tilde{G}$, כל $S_\ell T_\alpha S_\ell^{-1} = T_{S_\ell(\alpha)}$ וכן כל $a \perp a$ או $a \parallel a$. אם יש $a \parallel a$ יחיד ואין סיבובים $G = \{ T_{na} S_\ell, T_{na} \}$

$\begin{matrix} \ell_2 \\ \uparrow \\ \ell_1 \end{matrix}$

~~חבורה "ריבועית" של $\mathbb{Z}^2$~~

למעשה אין $S_\ell, S_\ell \in \tilde{G}$, $a \perp a$ וכן $\ell_1 = a$ וכן $\ell_2 = a$. הוכחה - $S_\ell S_\ell x = x + ca$

אם $a \perp a$. וכן ℓ_1 ו- $S_\ell \in \tilde{G}$ $a \parallel a$ הוא יחיד מסוג זה.

אם $S_\ell \in \tilde{G}$, $a \perp a$ ואין סיבובים אז G כוללת שיקולים.

מהצורה של ℓ - $\frac{n\pi}{2}$. $G = \{ \mathbb{Z}a, S_{\ell + \frac{n\pi}{2}} \}$

(אם יש גם שיקולים $a \perp a$ וכן $a \parallel a$ אז יהיה סיבוב)

נניח G - כל כוללת שיקול וסיבוב $R_{0,\pi}$. אז אם $S_\ell \in \tilde{G}$, $a \parallel a$.

אם $\ell \in SO$ ו- $R_{0,\pi} S_\ell = S_\ell$ עבור $a \parallel a$. וכן יש גם שיקולים $S_{\ell + \frac{n\pi}{2}}$

והצורות ואלימות $T_{na}, T_{na} S_\ell$ - $G = \{ \mathbb{Z}a, T_{na} S_\ell, S_{\ell + \frac{n\pi}{2}}, R_{\frac{n\pi}{2}} \}$

שאר מקרה שבו אין שיקולים אלא רק אלימות S_ℓ כל S_ℓ . הרכבה

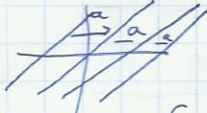
של אליטה כזו עם זרמה נותרת T_{2a} . וכן $b = \frac{n\pi}{2}$ ו- $a \parallel a$.

צריך ח' א' וואי. נקבל $G = \{ \mathbb{Z}a, T_{\frac{n\pi}{2}} S_\ell \}$

($a \parallel a$, n odd)

סקיצה למקרה Γ דו מימדי -

17 (!) מקרים - חבורות קריסטלוגרפיות.



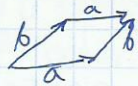
$\Gamma = \mathbb{Z}a$ מאפשר "ריבועי" אבל גם

אם יש גם סיבוב π - והריבוע $\uparrow$ מקיים (2) אבל לא 2. צריך

לחלק למצבים אלו רק a (בקוויים המודגשים).

לפי חבורת קריסטלוגרפית

נניח $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ו- $\tilde{G} \subseteq SO(2)$ - רק $\tilde{G}$ (סימבול) (סימבול) אין סימבול

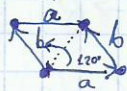


$G = \{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b\}$ התחום היסודי מקבילית

אם $R_{\theta, \pi} \in G$ אז $G = \{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b R_{\frac{\pi}{2}, \pi}\}$ תחום יסודי - תרגיל

אם $R_{\theta, \frac{\pi}{2}} \in G$ אז $b = R_{\theta, \frac{\pi}{2}}(a)$ (זקור a בסים מתאיין) - $G = \{\mathbb{Z}R_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}\}$

היציאה



אם $R_{\theta, \frac{2\pi}{3}} \in G$ אז $b = R_{\theta, \frac{2\pi}{3}}(a)$

אם $R_{\theta, \frac{\pi}{3}} \in G$ אז $b = R_{\theta, \frac{\pi}{3}}(a)$

משלים ו- 60° בקדקודים.

סימבול 120° במרכז

