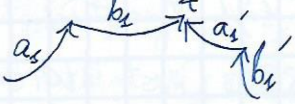
W11 D2
5/1/15

גיאו' לא אוקלידית

משפט לכל חב' דיסקרטית ב- $Iso^+(B)$ קיים מצולע מוכלל יסודי.

משפט $\Gamma \subseteq Iso^+(B)$ דיסקרטית, F מצולע יסודי ו- a קדקוד שלו. לכל $g \in \Gamma$ $F \cap g(F)$ ריק או קדקוד או צלע שלמה, $\{a_1, \dots, a_n\}$ קבוצת הקדקודים עם $\gamma_i(a_i)=a$, $\omega_i = \sphericalangle a_i$. אז $\sum \omega_i = 2\pi/m$, ל- $m=\#Stab(a)$. בחבורות משמרת כל ההעתקות היפרבוליות ולכן $m=1$. (1) לכן אם F עם $4p$ צלעות מצולע הוא, כל הקדקודים ולכן סכום הזוויות 2π,



ו- $S' = 4\pi(p-1)$.

$G = SL(2,\mathbb{Z}) \subseteq Iso^+(H)(2)$ לא היפרבולית - $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ אליפטית.

משפט המשולש

תחום יסודי - הזוויות $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0)$ $\sum_{i=1}^{2} \omega_i = \frac{2\pi}{3}$

טענה - (א) $\{A_1, A_2\}$ המסלול. $z \mapsto z \pm 1$ מעביר אחד לשני, ברור שאינסוף לא.
(ב) $m=3$. תרגיל.

הוכחת המשפט

$z \in H$, $g \in G$.

$$Im(g(z)) = \frac{Im(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = Im\frac{(ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd)}{|cz+d|^2} = \frac{Im\, z}{|cz+d|^2}.$$

לכן במסלול של z מספר סופי של Im הגדולים מ- $Im\, z$ ($|cz+d|<1$) חיתוך של סריג ועיגול.

$G' = \langle -1/z, z+1 \rangle \subseteq G$ (תרגיל - $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ יוצרים של $SL(2,\mathbb{Z})$).

אז $\bigcup_{g \in G'} g(\bar{D}) = H$. נוכיח - ניקח $z \in H$ ו- $g' \in G'$ עד $Im\, g'z$ מקסימלי. אפשר להניח $-\frac{1}{2} \le Re\, g'z \le \frac{1}{2}$. $Im(w) \ge Im(-1/w) = \frac{Im\, w}{|w|^2}$ ולכן $|w| \ge 1$ ולכן $\bar{D} \ni g'z$. נותר רק להוכיח -

טענה אם $z \in Int(D)$, $g \in G$, $g(z) \in \bar{D}$ אז $g = Id$.

הוכחה $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. אז (א) $c=0 \Rightarrow a=d=1$ ו- $g(z)=z+b$ והטענה ברורה.
(ב) $c \neq 0$, אז אפשר לרשום $g(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}$, כלומר $|g(z) - a/c||z + d/c| = 1/c^2$
אז $\underbrace{Im(z + d/c) = Im\, z}_{\ge \sqrt{3}/2}$, $\underbrace{Im(g(z) - a/c) = Im\, g(z)}_{\ge \sqrt{3}/2}$ ולכן $\frac{1}{c^2} \ge 3/4$ ולכן $c = \pm 1$.

נקבל $\underbrace{|g(z) \pm a|}_{\ge 1} \underbrace{|z \pm d|}_{> 1} = 1$ ונקבל סתירה. לכן המקרה היחיד $g = Id$.

חבורת משטח

$F \subseteq \mathbb{H}$ עם $4p$ צלעות $a_1, b_1, a_1', b_1', \dots, b_n'$ עם $|a_i| = |a_i'|$ ו- $\sum w_i = 2\pi$.

טענה לכל $i=1,\dots,p$ קיים ויחיד $g_i, h_i \in Iso^+(\mathbb{H})$ כך ש- $g_i(a_i)=a_i'$, $h_i(b_i)=b_i'$ (באוריינטציה נכונה)

הוכחה ראינו שניתן לקבוע תמונה של 2 נק' באותו מרחק וזה נותן העתקה יחידה.

משפט $\Gamma = \langle g_1, h_1, \dots, g_p, h_p \rangle$ חבורה $\underbrace{\text{דיסקרטית היפרבולית}}_{\text{עם יחס יחיד } g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \cdots h_p^{-1} = e}$ עם תחום יסודי F ומרחב מנה משטח חלק, סגור, עם p ידיות.

[למה קיימים מצולעים כאלה? כמו בניה של מחומש בגיאומטריה ספרית.]

הוכחה Γ פועלת טרנזיטיבית על קדקודי F (כי כל הקדקודים מזדהים).

רק צריך לבדוק $\bigcup g(F) = \mathbb{H}$ - שבכל קדקוד צלעות נדבקות נכון...

שטח תחום יסודי של חב' דיסקרטית

למה F מצולע תחום יסודי של Γ. אם $\bar{F}$ כולל צלע על ∂B אז $S(F)=\infty$.

הוכחה נכון למשולשים ואפשר לעשות שילוש.

למה אם ל-F מס' קדקודים סופי ללא צלעות על שפה אז $S(F)<\infty$.

הוכחה שוב נכון למשולשים $S=\pi$.

משפט (זיגל) $F \subseteq B$ יסודי של חב' דיסקרטית עם $S(F)<\infty$. אז ל-F מס' קדקודים סופי.

הוכחה נסמן $S=S(F)$, $V(F)$ קב' הקדקודים. $S'=(n-2)\pi-\sum w_i$ למקרה סופי, אבל במקרה כללי זה שקול ל- $2\pi+S=\sum_Y \pi+\sum \pi - w_i$ (כל קדקודים בתוך ספר (לא)), $w_i<\pi$ מהגדרה. לכן $|X|<\infty$

$Y=Y_1\cup Y_2\cup\dots$ חלוקה למסלולים ∞, עוד לא הוכחנו שזה וכל $a\in Y_k$

$\#Stab_\Gamma(a)=n_k<\infty$. $\sum_{a\in Y_k} w_i = 2\pi/n_k$. לכן $2\pi+S\geq\sum_{Y_k}\pi-\frac{2\pi}{n_k}$ ולכן $M_k=|Y_k|<\infty$

כעת $2\pi+S\geq\sum_k \pi\left(M_k-\frac{2}{n_k}\right)\geq\sum_k \pi/3$ כי $\sum_{a\in Y_k} w(a)=\frac{2\pi}{n_k}$ ולכן יש מס' מסלולים סופי.

משפט שטח מצולע יסודי $\geq \frac{\pi}{21}$.

הוכחה במקרה ששטח סופי, מספר קדקודים סופי, $S'=\pi\left(\overset{|X|}{u}-2+\sum_{k=1}^{s}\left(M_k-\frac{2}{n_k}\right)\right)$

ולכן $0<S/\pi=\mu=v-2+\sum M_k-\frac{2}{n_k}$, $v=u+\sum_{n_k=1}M_k-2+\sum_{n_k\geq2}M_k-1$. אם $p=0$ μ שלם ולכן $S\geq\pi$.

(להניח שכל $M_k=1$ בסכום זה, $n_k\geq3$)

אם $p\geq1$ אבל $3\leq n_k\leq4$ לכל p n_k שמספר ה-p, μ עם מכנה ≤ 6 ולכן $S\geq\pi/6$.

אם $p\geq1$ ו- $\mu\geq\frac{1}{15}-1$ הכל בסדר. אם $p\geq1$ ו- $\mu<\frac{1}{15}-1$ ו- n_k כלשהו, כלומר $n_1\geq5$.

לכן $\frac{1}{15}>\mu=v-2+\sum\left(1-\frac{2}{n_k}\right)\geq v-2+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}(p-1)$ ולכן נקבל לבסוף $3v+p<5\frac{2}{5}$, ולכן $3v+p\leq5$.

מצב שני $\mu<0$ $p+2v-2$ ולכן $v+p\geq3$. פתרונות $(v,p)=(0,3),(0,4),(1,2)$

צריך לבדוק כל מקרה בנפרד. נמשיך בשבוע הבא.