גאו' לא אוקלידית

חבורות דיסקרטיות וריצופים של מישור היפרבולי

משפט: תהי $\Gamma\subseteq Iso^+(\mathbb{B})$ תת חבורה, $A(\Gamma)\subseteq SL(2,\mathbb{C})$. אז Γ דיסקרטית אם"ם $A(\Gamma)$
כתת קבוצה ב- $SL(2,\mathbb{C})$.

הוכחה $\Leftarrow$ נניח בשלילה $A(\Gamma)$ אינה דיסקרטית, $B_k\to B$, $B_i\neq B_k$ - אז
$C_k=B_kB_{k+1}^{-1}\to I$, $\hookrightarrow \varphi_k\in\Gamma$, $\neq I$ וניקח $x_0\in\mathbb{B}$ כך שלכל $k\neq i$ $\varphi_i(x_0)\neq\varphi_k(x_0)$ אבל
$\varphi_i(x_0)\to x$ בסתירה לדיסקרטיות.

$\Rightarrow$ נניח Γ לא דיסקרטית. נעבוד במודל של $\mathbb{B}=\Delta$. איזו' כלליות
היא $g(z)=\alpha\frac{z-a}{1-z\bar a}$ כך ש $|\alpha|=1$, $|a|<1$.

למה $g(z)\in Iso^+(\Delta)$ $\iff$ $g(z)=\frac{pz+\bar q}{qz+\bar p}$ כאשר $|p|^2-|q|^2=1$. **הוכחה**: תרגיל.

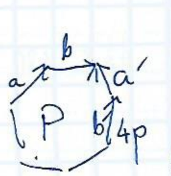
אז יש $z_0\in\Gamma$ כך ש-w נק' הצטברות של Γz_0 -
$g_k(z_0)\xrightarrow[k\to\infty]{} w$.

למה $g\in Iso^+(\Delta)$ $\Leftarrow$ $|g(z_0)|^2=1+\frac{|z_0|^2-1}{|qz_0+p|^2}$ **הוכחה**: תרגיל.

לכן נקבל $\frac{1-|z_0|^2}{|q_kz_0+p_k|^2}\longrightarrow \underbrace{1-|w|^2}_{c_1}>0$, לכן $|q_kz_0+p_k|^2\longrightarrow\frac{1-|z_0|^2}{c_1}=:c_2$.

כמו כן $|p_k|^2-|q_k|^2=1$. ול-k גדול מספיק $|q_kz_0+p_k|^2<2c_2$
$\overset{\shortparallel}{|p_k|^2\left|1+\frac{q_k z_0}{p_k}\right|^2}\geq|p_k|^2(1-|z_0|)^2\Rightarrow|p_k|<\frac{\sqrt{2c_2}}{1-|z_0|}$ ולכן יש תת סדרה
של ערכי p שמתכנסת, נאמר $p_k\to p_0$. לכן גם q_k חסומה
~~וגם לכן~~ ושוב יש תת סדרה מתכנסת בסתירה, שכן נקבל $C_k\to C_0$. $A(\Gamma)$ לא דיסקרטית.

דוגמה $SL(2,\mathbb{Z})\subseteq SL(2,\mathbb{C})$ דיסקרטית.



חבורות משטח $\Gamma\subseteq Iso^+(\mathbb{B})$ אז היא S_p^2 ולה תחום יסודי
ל- $\Gamma=\langle g_1,\dots,h_p\rangle$ כך ש- $g_i(a_i)=a_i'$, $h_i(b_i)=b_i'$, $\sum_{i=1}^{4p}\alpha_i=2\pi$
ואורך a_i = אורך a_i', אורך b_i = b_i'. אז $S'(P)=4\pi(p-1)$.

הגדרה: $\Gamma\subseteq Iso^+(\mathbb{B})$ נקראת **היפרבולית** אם $\forall g\neq e\in\Gamma$ הוא העתקה היפרבולית.

משפט כל תת חבורה היפרבולית לא קומוטטיבית היא דיסקרטית.

הוכחה אפשר להניח שקיים $C=\begin{pmatrix}\rho&0\\0&\frac{1}{\rho}\end{pmatrix}\in\Gamma$, $\rho>1$. נניח בשלילה ש-Γ ($A(\Gamma)$) לא דיסקרטית, ולכן
יש סדרה $B_k\to I$ ב-Γ. נסתכל על הקומוטטורים $A_k=CB_kC^{-1}B_k^{-1}$ ששווים
$B_k=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ איבר היפרבולי $\begin{pmatrix}ad-\rho^2bc & ab(\rho^2-1)\\ cd(\frac{1}{\rho^2}-1) & ad-\frac{bc}{\rho^2}\end{pmatrix}$

$\left(2-bc(\rho-\tfrac{1}{\rho})^2\right)^2=\left[2ad-(\rho^2+\tfrac{1}{\rho^2})bc\right]^2=tr^2\geq4$

ולכן $b^2c^2(\rho-\frac{1}{\rho})^2 \geq 4bc$. אז $(abcd)^2(\rho-\frac{1}{\rho})^4 \geq -4abcd$ וכי גם הקומוטטורים $CD_kC^{-1}D_k^{-1}$ הם

היפרבוליים, $tr^2 \geq 4$. כיוון ש- $B_k \to I$ קיים k כך שלכל $k \geq k_0$,

$bc \geq 0$ (כי סגור ואחרת היינו מקבלים $b^2c^2(\rho-\frac{1}{\rho})^2 < 4bc$ לבסוף). באופן דומה

מכך ש $(abcd)^2(\rho_k-\frac{1}{\rho})^4 \geq -4abcd$ נסיק $bc \leq 0$ באותו אופן, ולכן $bc=0$.

לכן $tr^2 D_k = 4$ וכן B_k מתחלף עם C (ולכן כל B_k אלכסוני).

$d = 1/a \neq 1, -1$. כעת ניקח איבר כלשהו $E \in A(\Gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ והקומוטטורים

$F_k = B_kEB_k^{-1}E^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} I$. לכן גם (מאותו טיעון שהיה ל- B_k) F_k אלכסונית -

אבל $F_k = \begin{pmatrix} * & \alpha\beta(a_k^2-1) \\ \gamma\delta(a_k^{-2}-1) & * \end{pmatrix}$ ולכן $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$. אם $\alpha=0$ אז $\gamma\neq 0$, $\beta \neq 0$, $\delta = 0$

ואז $tr E = 0$ לא היפרבולי. לכן $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\beta=\gamma=0$ ולכן E

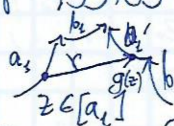
אלכסונית ומתחלפת עם C. לכן Γ קומוטטיבית.

<u>דוגמה</u> $SL_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ אליפטי - לא קומוטטיבית ולא היפרבולית אבל דיסקרטית.

<u>משפט</u> כל חבורת משטח היא היפרבולית.

<u>הוכחה</u> צריך להוכיח שאין איברים פרבוליים. נניח בשלילה $g \in \Gamma$ פרבולי.

נוכל לקחת $g(z) = z+1$. נסתכל על הריצוף של $\mathbb{H}$ ע"י עותקים

של תחום יסודי. 

ולכן גם $g(z) = z+1$ נמצא

על הגבול. כשנעבור למנה ע הפכת ללולאה שאינה הומוטופית

לנקודה.

כעת ניקח סדרה של נק' על הגבול עם $z_k = a_k + ib_k$, $b_k \to \infty$.

נקבל סדרה של לולאות γ_k ואורך לולאה לא טריוויאלית $\rho(\gamma_k) = \rho(z_k, z_k+1)$

שואף ל-0, מה שכמובן לא ייתכן.

לכן Γ דיסקרטית היא היפרבולית. אם היא לא קומו' אז עד כדי

הצמדה $\Gamma = \langle B_n z \mid n = 1, 2, \ldots \rangle$.

<u>תחום יסודי של חבורה דיסקרטית</u>

<u>הגדרה</u> <u>מצולע היפרבולי מוכלל</u> P הוא חיתוך בן מנ"ה (מוכלל) של חצאי מישורים עם פנים לא ריק.

<u>משפט</u> לכל Γ דיסקרטית קיים מצולע יסודי.

<u>הוכחה</u> Γ בת מנ"ה ולכן קב' נק' שבת של Γ בת מנ"ה, נוכל לקחת

$y_0 \in B$ כך ש- $y_0 \neq gy_0$ לכל $g \in \Gamma$. נגדיר $P = \{y \in B \mid \rho(y_0, y) < \rho(g(y_0), y)$ לכל $g \in \Gamma\}$

מצולע מוכלל.

ניקח $B_{y_0}(r)\subseteq B$ ו- r כלשהו. קבוצת איברים $g\in\Gamma$ כך ש-

$g(y_0)\in B_{y_0}(r)$ סופית $g_1,\dots,g_n$. נגדיר $U=\{y \mid \rho(y_0,y)<\rho(g_k(y_0),y)\}\cap B_{y_0}(r/3)$ פתוחה

ומוכלת ב- P, כי לכל $g\neq g_1,\dots,g_n$ $\rho(y_0,y)<\rho(g(y_0),y)$

כעת $y_1\in P$ נק' כלשהי. נסמן $\rho(y_1,y_0)=d$, $B_{y_0}(3d)$ מכיל כמות סופית

של איברים $g_1,\dots,g_n$ וכמו קודם נסיק ש- $y_1\in U\subseteq P$ ל- U פתוחה כלשהי,

ולכן P פתוחה. $d=\rho(y_0,y_1)<\rho(g_i(y_0),y_1)$. לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש-

$\varepsilon<\frac{d}{2}$ ו- $\rho(g_i(y_0),y_1)>d+2\varepsilon$. אז לכל $y\in B_{y_1}(\varepsilon)$, $\rho(y_0,y)<d+\varepsilon$,

$\rho(g_i(y_0),y)\geq\rho(g_i(y_0),y_1)-\rho(y_1,y)>d+\varepsilon$ ולכל g אחר $\rho(g(y_0),y)>2d-\varepsilon>d+\varepsilon$

לכן $B_{y_1}(\varepsilon)\subseteq P$ ולכן P תחום פתוח.

לכן P מצולע מוכלל, נראה שהוא תחום יסודי. נוכיח שלכל $e\neq g\in\Gamma$

$P\cap g(\bar P)=\emptyset$, כי לכל $y\in P$ מתקיים $\rho(g(y_0),y)>\rho(y_0,y)$ ולכן $=\rho(y_0,g^{-1}(y))$

$=\rho(g^{-1}(y_0),g^{-1}(y))$

$g^{-1}(y)\notin\bar P$ א"כ $y\notin g\bar P$.

נוכיח $\bigcup_{g\in\Gamma} g(\bar P)=B$. $\bar P=\{y \mid \rho(y_0,y)\leq\rho(g(y_0),y)\}$ וניקח $z\in B$. אז

ניקח $g\in\Gamma$ כך ש- $\rho(g(y_0),z)$ מינימלי (יש מינימום כי Γ דיסקרטית).

אז מהגדרה $z\in g\bar P$

משפט על <u>זוויות</u> יהי P מצולע מוכלל, תחום יסודי של חב' דיסקרטית Γ,

A קדקוד של P, $\bar P\cap g(\bar P)$ או ריק או קדקוד או צלע, משפחה של הקדקודים:

$\{A_1,\dots,A_n\}=\{B\in\bar P \mid \exists g\in\Gamma\ g(B)=A\}$. אז $\sum\alpha_i=\frac{2\pi}{m}$ כאשר

$\alpha_i=\angle A_i$, $i=1,\dots,n$. $m=\#\{g\in\Gamma \mid g(A)=A\}$. בפרט למשולש $m=1$, $\sum\alpha_i=2\pi$.

<u>הוכחה</u> תמונות של $\bar P$ הכוללות את A, העברה של A_i ל- A ולא משהו

ב- stab A. סכום זוויות את הוא $m\sum\alpha_i=2\pi$.