27/10/14
W1 D2

גיאומטריות לא אוקלידיות

תרגילים: לא חובה אבל 10% בונוס לציון הסופי. בחינה עם חומר פתוח.

ב-24 בנוב' אין שיעור, ויהיה שיעור השלמה בשישי.

החומר יעלה לאתר של שוסטין math.tau.il/~shustin/teaching.html - תרגילים, סילבוס

חומרי לימוד...

חומר - אוקלידית, ספרית, היפרבולית (בעיקר מימד 2) בכלים של

מטריקה ושל חבורות טרנספורמציה.

חבורות

הגדרה G תיקרא חבורה אם היא קבוצה לא ריקה עם פעולה בינארית אסוציאטיבית, עם איבר ניטרלי והופכי.

אין בהכרח קומוטטיביות, לפעמים נרצה. תרגיל (פשוט) - איבר יחידה יחיד וגם ההופכי יחיד.

דוגמה (1) X - לא ריקה. $S(X)=Aut(X)=\{f:X\to X$ חח"ע ועל $\}$

(2) תת חבורות של $S(X)$.

מקרה של (2):

(3) $X=\mathbb{R}^n$, טרנספורמציות לינאריות הפיכות $GL_n(\mathbb{R})$.

(4) מטריצות אורת' $O_n(\mathbb{R})$, $AA^t=I$

(5) $SO_n(\mathbb{R})$, מטריצות מדט' 1. $O_n(\mathbb{R})\setminus SO_n(\mathbb{R})$ לא חבורה.

הגדרה הומ' $f:H\to G$ כך ש- $f(ab)=f(a)f(b)$. לכן $f(e)=e,\ f(a^{-1})=f(a)^{-1}$

דוג': $\varphi=\det: GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$. $\ker\varphi=SO_n(\mathbb{R})$. $\ker\varphi\lhd G$ - $\forall g\in G,\ g^{-1}Hg=H$

החבורה שתהיה לנו חשובה במיוחד היא חב' טרנספורמציות ששומרות את מטריקה - איזומטריות.

איזומטריות במרחב אוקלידי

הגדרה $\mathbb{R}^n$ עם מכפלה פנימית (סקלרית) $\langle\cdot,\cdot\rangle: a,b\mapsto\langle a,b\rangle$ כך ש- $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$, $\langle a+b,c\rangle=\langle a,c\rangle+\langle b,c\rangle$, $\langle a,a\rangle\geq 0$, ושוויון אם"ם $a=0$.

משפט קיים בסיס א"נ לכל מרחב אוקלידי $e_1\ldots e_n$. $(a,b)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$

ובפרט $\|a\|^2=(a,a)=\sum_{i=1}^n x_i^2$. $(a,e_i)=x_i$.

הגדרה איזומטריה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש- $\langle f(a),f(b)\rangle=(a,b)$

משפט מספיק לדרוש $(f(a),f(a))=(a,a)$. למה? כי $(a,b)=\frac{\|a+b\|^2-\|a\|^2-\|b\|^2}{2}$

<u>דוגמה</u> f ליניארית. מתי היא איזומטריה? $f(x)=Ax$

$x(A^tA)y = xIy$ לכל x,y ולכן $AA^t = I$. גם הכיוון ההפוך נכון.

לכן זה בדיוק $O(n)$.

<u>הגדרה</u> f איזומטריה מוכללת אם $\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$ (איזומטריה של $\mathbb{R}^n$ במרחב אפיני). למשל $f(x)=x+y$ גם כל איזומטריה רגילה.

גם כל הרכבה.

<u>מסקנה</u> איזו' של $\mathbb{R}^n$ אפיני כוללות כל $f(x)=Ax+b$, כאשר A אורת'.

מסתבר שזה <u>כל</u> $Iso(\mathbb{R}^n)$.

<u>הוכחה</u> תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה. נגדיר $f_0(x)=f(x)-f(0)$. נרצה להוכיח שהיא ליניארית. $f(0)=0$. נבדוק ש-f_0 שומרת על זוויות -

לפי משפט הקוסינוסים.

$e_1,\dots e_n$ בסיס אורת' - לכן גם $f(e_1)\dots f(e_n)$.

$a=\sum x_ie_i$, $f(a)=\sum y_i f(e_i)$. מכפל ~~ב~~ ב-e_i / $f(e_i)$ נקבל $y_i=x_i$.

לכן $f(x)=Ax$ כאשר $A=\begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$.

<u>מסקנה</u> כל איזו' היא ז'

$Tran(\mathbb{R}^n)\to Iso(\mathbb{R}^n)\to O(n)\xrightarrow{}\{\pm1\}$. $O(n)\ltimes Tran(\mathbb{R}^n) = Iso(\mathbb{R}^n)$.

הא'יזו' $Ax+b \mapsto \det A$ מ-$Iso(\mathbb{R}^n)$ ל-$\{\pm1\}$, גרעין $Iso^+(\mathbb{R}^n)$.

איזומטריות ששומרות <u>אוריינטציה</u>.

<u>איזומטריות של $\mathbb{R}^2$</u>

<u>דוגמאות</u> - (1) הזזות $T_b(x)=x+b$.

(2) סיבוב $R_{a,\alpha}(x)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}(x-a)+a$

(3) שיקוף S_l

מקרה פרטי של:

(4) גליסה $G_{l,a}=T_a\circ S_l$ (a <u>מקביל</u> ל-l).

<u>משפט</u> כל איזו' של $\mathbb{R}^2$ היא מצורה (1), (2) או (4).

$f(x)=Ax+b$. אם $A=I$ אז f היא הזזה T_b.

אם $A\neq I$ מדט 1 סיבוב ביחס ל-$(I-A)^{-1}b$ $\leftarrow$ הפיך - ע"ע של A $\cos\alpha\pm i\sin\alpha$.

אם הדט -1 אז $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$. בבסיס מתאים $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

אז בבסיס הזה זה שיקוף ביחס לציר x. נפרק $b=(b_1,0)+(0,b_2)$.

$T_{b_\parallel}$ $T_{b_\perp}$

אבל $T_{b_1}\circ S_l$ זה ~~זה~~ $S_{l'}$ ולכן זה נכון.

טענה 1/ העתקות שונות דמויות (ע"י איזו' כלשהי). (1) (2) (3) (4) פרט ל-(3)

הוכחה/ נחשוב עליהן כעל שינוי מערכת קואורדינטות (הצגה) f,
ונמצא $f(Z)\subseteq Z$ קבוצות גיאומטריות מבין נקודות וקווים ישרים.

(0) זהות.

(0)\(1) קווים בשיפוע נתון.

(0)\(2) נקודה יחידה.

(3) כל הנקודות על קו והקו עצמו, כמו גם כל קו שמאונך לו.

(3)\(4) הקו עצמו.

וזה נשמר תחת הצמדה.

חבורות דיסקרטיות של איזומטריות

הגדרה/ תהי $G<Iso(\mathbb{R}^n)$. נאמר ש-G **דיסקרטית** אם לכל $x\in\mathbb{R}^n$ קיים $\varepsilon>0$ כך שבכדור ברדיוס ε סביב x אין נק' מ-$Gx\setminus\{x\}$. ($\rho(gx,x)<\varepsilon$)

למה (1) G דיסקרטית $\longleftrightarrow$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $y_1\neq y_2\in Gx$ $\rho(y_1,y_2)\geq\varepsilon$.

(2) G דיסקרטית $\longleftrightarrow$ G_x דיסקרטית לכל x.

הוכחה תרגיל פשוט.

משפט $G<SO(2)$ דיסקרטית $\longleftrightarrow$ ציקלית סופית (סיבובים ב-$\frac{2\pi k}{n}$, $0\leq k<n$).

הוכחה G שומרת על מעגל יחידה. ~~...~~ מסלול של נק' $x=(1,0)$ סופי.
נקודה $y=gx$ הכי קרובה, g יוצרת את G. כמו כן g סיבוב בזווית $\frac{2\pi}{n}$ ל-n שלם כלשהו ולכן G כנדרש.

משפט $G<O(2)$ דיסקרטית $\longleftrightarrow$ המצב במשפט הקודם אם $G\subseteq SO_2$,
כלומר חבורה דיהדרלית D_n (לחילופין D_{2n}, תלוי בסימון).

הוכחה: $O(2)\to\{\pm1\}$ עם גרעין $SO(2)$. נצמצם ל-G ונקבל גרעין ציקלי.
ואם חייב להיות שיקוף (כלומר, התמונה לא טריוויאלית) נקבל D_n ואחרת $\mathbb{Z}_n$.

משפט: $G<Tran(\mathbb{R}^n)$ דיסקרטית $\longleftrightarrow$ היא סריג, כלומר קיימים $a_1,\dots,a_m$ $(0\leq m\leq n)$ בת"ל
כך ש- $G=\{\sum k_i a_i : k_i\in\mathbb{Z}\}$. כלומר $G=\oplus a_i\mathbb{Z}$. m נקרא דרגת הסריג,
והמקרה $m=n$ הכי מעניין.