

מד"ר 1 - תרגול 9

Save a tree - don't write madar

13.12.10

משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה

מד"ר לינארי הומוגני במקדמים קובעים

דוגמא.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

כפי שעשינו בכיתה נניח y_1, y_2 פתרונות:

$$\begin{cases} y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 0 \\ y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 0 \end{cases}$$

הנגזרת היא אופרטור לינארי, לכן $c_1y_1 + c_2y_2$ הוא פתרון לכל c_1, c_2 .
נניח (או למעשה נחש) ש- $y = e^{\lambda t}$ פתרון. נחשב $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$.
נציב במשוואה:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 5\lambda e^{\lambda t} + 6e^{\lambda t} = 0$$

כמובן ש- $e^{\lambda t} \neq 0$ לכן,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

וזה נקרא הפולינום האופייני.
נפתור:

$$\lambda_{1,2} = 2, 3$$

פינת העשרה: היסטורית ידענו לפתור מד"רים הרבה לפני שפיתחו את לינאריות 2 עם פולינומים
אופייניים ודברים כיפיים אחרים (ז'ורדן).

כמו שראינו בכיתה אפשר לפרש את מרחב הפתרונות ע"י e^{2t}, e^{3t} אם הם פתרונות בלתי
תלויים (מראים עם ורונסקיאן).

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$$

מדוע שני קבועים? למעשה מסתתרים כאן שני הוצאות של אינטגרל (מד"ר מסדר שני) בגלל שניחשנו פתרון, האינטגרלים הצליחו להסתתר היטב. ניקח תנאי התחלה:

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 3$$

המספרים נקבעו באקראי לחלוטין ולא קשורים לערכים העצמיים. יצא ממש במקרה. אפשר לפתור גם כאשר הערכים העצמיים הם לא תנאי התחלה. באמת באמת. נציב $t = 0$:

$$2 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$3 = y'(0) = 2c_1 + 3c_2$$

כעת אפשר למצוא את הקבועים. תזכורת לצורה המטריציאלית: נסמן:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y(t) = 3e^{2t} - e^{3t}$$

דוגמא.

$$y'' + y' + y = 0$$

שוב נניח,

$$y = e^{\lambda t}$$

נחשב פולינום אופייני:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

קיבלנו זוג פתרונות מרוכבים. האם זה מפריע לנו? לא. נוכל להמשיך לפתור גם במרוכבים. אבל האם כדאי להתחיל לדאוג לכך שנקבל פתרון מרוכב שאנחנו לא מעוניינים בו? ממש לא. יש לנו תנאי התחלה ממשי וממשפט קיום ויחידות אפשר להרחיב אותו לפתרון ממשי. באופן כללי, נסמן: $\lambda = \alpha + i\beta$.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 + a\bar{\lambda} + b = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 + a\bar{\lambda} + b = 0$$

$$y = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$$

צריך לזכור נוסחה חשובה:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

כעת נכתוב:

$$\frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) \right) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

וזה פתרון כי צירוף לינארי של פתרונות. באותו אופן:

$$\frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2} = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

משיקולי קיום ויחידות הפתרון שיווצר יהיה ממשי.

נחזור לדוגמא:

$$y(t) = c_1 e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + c_2 e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t}$$

נכתוב בצורה ממשית:

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

אלה כבר קבועים אחרים. מפה נותר רק להציב תנאי התחלה ולקבל את הקבועים.

בדוגמא הראשונה ראינו שני שורשים ממשיים שונים, בדוגמא השנייה ראינו שני שורשים מרוכבים צמודים. נשאר רק לראות דוגמא של שני שורשים ממשיים שווים.

דוגמא.

$$y'' + 4y' + y = 0$$

פולינום אופייני

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

יש שורש כפול בעיה, כי הוכחנו שמרחב הפתרונות דו ממדי. מאיפה ניקח פתרון שני? הוכחנו בכיתה שכדי לקבל את הפתרון השני הוא הראשון מוכפל ב- t (וזה עובד גם בצורה כללית. אם המד"ר היה מסדר גבוה, היינו יכולים להכפיל ב- t^2 והיינו יכולים לקבל עוד פתרון).
קיבלנו שני פתרונות:

$$y_1 = e^{-2t}$$

$$y_2 = te^{-2t}$$

והפתרון הכללי יהיה:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

נותר למצוא מקדמים.

"משוואות חסרות"

בצורה הכללית ביותר מד"ר מסדר שני נראה כך:

$$f(t, y, y', y'') = 0$$

אם נניח שאחד הרכיבים חסר, לדוגמא,

$$f = f(y, y', y'')$$

או

$$f = f(t, y, y'')$$

במקרים כאלה ניתן לפתור (עד כדי חישוב אינטגרלים).

דוגמא.

$$t^2 y'' + 2ty' - 1 = 0$$

משוואה חסרה (y חסר).

נגדיר $v = y'$
נקבל:

$$t^2 v' + 2tv = 1$$

משוואה לינארית מסדר ראשון. וזה אנחנו יודעים לפתור.

$$v = \frac{c_1}{t^2} + \frac{1}{t}$$

למה c_1 ? המשוואה מסדר שני לכן צריך להגיע לשני קבועים.
נותר לעשות אינטגרל:

$$y = -\frac{c_1}{t} + \ln|t| + c_2$$

דוגמא. מצב יותר מעניין:

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

משוואה לא לינארית!
אבל חסר ביטוי מפורש ל- t . (כאלה נקראות בעיות אוטונומיות).
מה נעשה? אם t חסר ננסה להשתמש ב- y כבלתי תלוי. אבל הוא תלוי?

$$v = y'$$

$$v' = y''$$

אבל לא נרצה להכניס אינטגרל במקום y .

$$y \cdot \frac{dv}{dt} + v^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

$$y \cdot v \frac{dv}{dy} + v^2 = 0$$

קשר בין v ל- y במשוואה ניתן להפרדה. נרצה לחלק ב- v .
תחילה נבדוק פתרונות סינגולריים:
אם,

$$y' = v = 0$$

אזי זהו פתרון, ולכן הפתרון הוא:

$$y = c$$

לכן כל פונקציה קבועה היא פתרון סינגולרי.
כעת, תחת ההנחה $v \neq 0$,

$$y \frac{dv}{dy} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln |v| = -\ln |y| + c$$

נרצה להפטר מערכים מוחלטים.
נניח ש- $y(0) > 0$ וכן $v(0) > 0$ (זה בעצם תנאי התחלה רגיל + יכולנו לעשות לכל תנאי התחלה)
אז קיים פתרון עבורו $0 < y(t) < v(t)$ עבור תחום t מסוים.

$$\ln v = -\ln y + c$$

$$\ln v = -\ln \frac{1}{y} + c$$

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{c_1}{y}$$

שוב משוואו ניתנת להפרדה.

$$y dy = c_1 dt$$

$$\frac{y^2}{2} = c_1 + tc_2$$

פתרון בהצגה סתומה.

שיטת הורדת הסדר

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$$

נשים לב שכאן יש באופן מפורש גם את y . להבדיל מהצורה הקודמת.
ידוע כי $y_1 = \frac{1}{t}$ פתרון.
שיטת הורדת הסדר מתבססת על כך שאנחנו יודעים פתרון אחד.

נגדיר: פתרון כללי:

$$y = y_1 \cdot v$$

נגזור:

$$y' = y_1' v + y_1 v'$$

$$y'' = y_1'' v + 2y_1' v' + y_1 v''$$

$$2t^2(y_1'' v + 2y_1' v' + y_1 v'') + 3t \cdot (y_1' v + y_1 v') - y_1 v = 0$$

$$(2t^2 y_1'' + 3t y_1' - y_1) \cdot v + (4t^2 y_1' + 3t y_1) \cdot v' + 2t^2 y_1 v''$$

אבל

$$(2t^2 y_1'' + 3t y_1' - y_1) = 0$$

כי y_1 פתרון.

קילבנו משוואה חסדרה ב- v

נציב $y_1 = \frac{1}{t}$

$$y_1' = -\frac{1}{t^2}$$

$$v' = u$$

נקבל:

$$y(t) = \frac{v(t)}{t} = \frac{2c_1 \sqrt{t}}{3} + \frac{c_2}{t}$$

הרכיב: $\frac{c_2}{t}$ הוא כבר חלק ממרחב הפתרונות לכן הפתרון השני הוא $\frac{2\sqrt{t}}{3}$.