

מד"ר 1 - תרגול 8

Save a tree - don't write madar

6.12.10

שיטות גיאומטריות למד"רים מסדר ראשון - המשך

תורת היציבות הלינארית (לינאריזציה)

$$\dot{x} = f(x)$$

נניח $f(x^*) = 0$. אז נקודת השבת x^* יציבה אם $f'(x^*) < 0$, לא יציבה אם $f'(x^*) > 0$.
ואם $f'(x^*) = 0$ יש לנתח הלאה.

דוגמא.

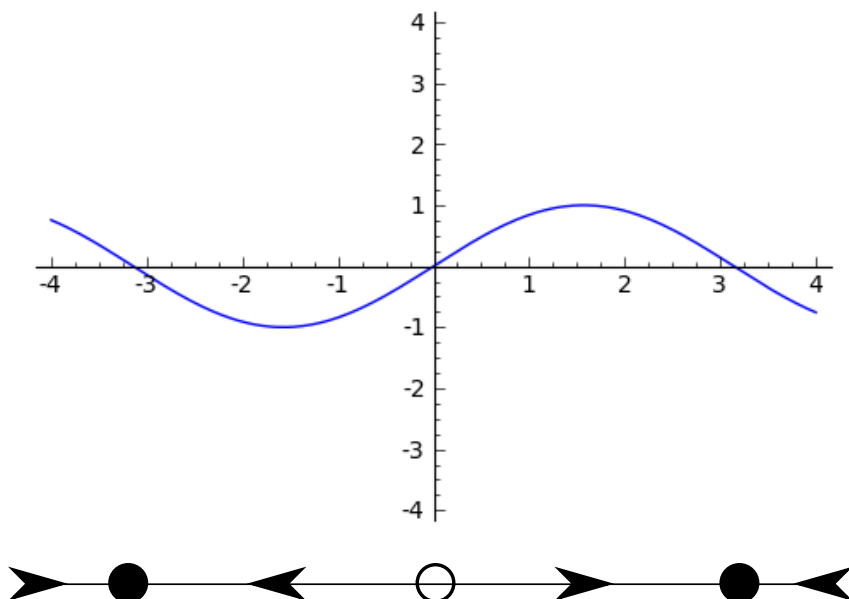
$$\dot{x} = \sin x$$

נקודות שבת: $x_n^* = n\pi$

$$\left. \frac{d}{dx} \sin x \right|_{x=n\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

n -ים אי-זוגיים - יציבות.

n -ים זוגיים - אי-יציבות.



מה לגבי המקרים הבאים?

$$\dot{x} = -x^3$$

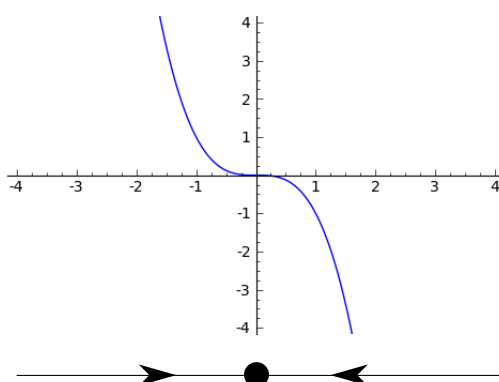
$$\dot{x} = x^3$$

$$\dot{x} = x^2$$

$$\dot{x} = 0$$

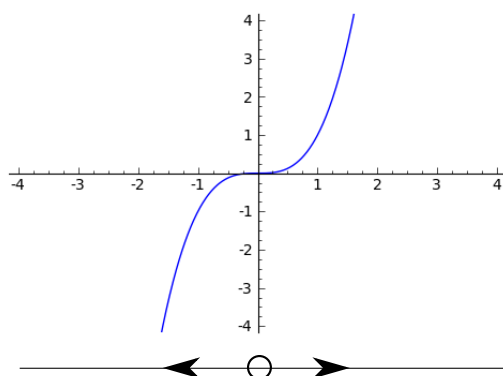
לכולן נקודת שבת ב- $x = 0$. בכולם הקריטריון נכשל כי $f'(0) = 0$.
נשרטט

$$\dot{x} = -x^3$$



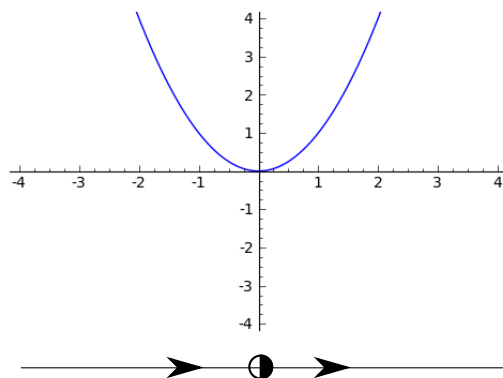
לכן יציבה.
נשרטט

$$\dot{x} = x^3$$



לכן לא יציבה.
נשרטט

$$\dot{x} = x^2$$



לכן יציבה למחצה.

$$\dot{x} = 0$$

אפילו לא נשרטט. כל הישר הוא נקודות שבת Neutrally stable.

זמני הגעה

$$\dot{x} = f(x)$$

כשאנחנו משרטטים אנחנו לא משרטטים את ציר ה- t . לכן, לא תמיד ברור אם בכלל נצליח להגיע לנקודת השבת.

דוגמא.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^c \\ x \geq 0 \end{cases}$$

לכל $c > 0$ היא נקודת שבת יציבה.
האם פתרון שתנאי ההתחלה שלו $x_0 \neq 0$ יכול להגיע ל- $x = 0$ בזמן סופי?
לא. אחרת הפתרון ב- x_0 חותך את פתרון האפס בסתירה לעקרון אי-החיתוך.

$$\frac{dx}{dt} = x^c$$

$$-\frac{dx}{x^c} = dt$$

$$-\int \frac{dx}{x^c} = \int dt$$

כמה זמן לוקח לפתרון להגיע מ- $x = 1$ ל- $x = 0$?

$$-\int_1^0 \frac{dx}{x^c} = t$$

$$c \neq 1 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^c} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-c+1} - 1}{c - 1}$$

$$c = 1 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^c} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \infty$$

אם $c > 1$, $-c + 1$ ואז $T = \infty$.

אם $0 < c < 1$

$$T = \frac{1}{1 - c}$$

נשים לב כי אז x^c לא ליפשיץ.

פוטנציאלים

$$\dot{x} = f(x)$$

$$V(x) = - \int f(t) dt$$

אז חקירת הפונקציה $V(x)$ של מינימום ומקסימום שקולה לחקירה של $f(x)$ של נקודות שבת.

דוגמא.

$$\dot{x} = -\sin(hx)$$

$$V(x) = - \int (-\sin(hx)) dx = \cos hx$$

למה שמישהו ירצה לעשות את זה?

פוטנציאלים הם כלי למערכות מד"רים ולא כאן.

פתח לתורה גדולה ורחבה.

ביפרקציות (מבוא למבוא למבוא)

$$\dot{x} = f(x, r)$$

r הוא פרמטר. כאשר משנים את r אפשר לשנות או לא לשנות את ישר הפזה איכותית. לדוגמא כאשר משנים ערכי r ייתכן שינוי במספר נקודות השבת או ביציבות שלהן.

דוגמא.

$$\dot{x} = 1 + rx + x^2$$

$$x_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4}}{2}$$

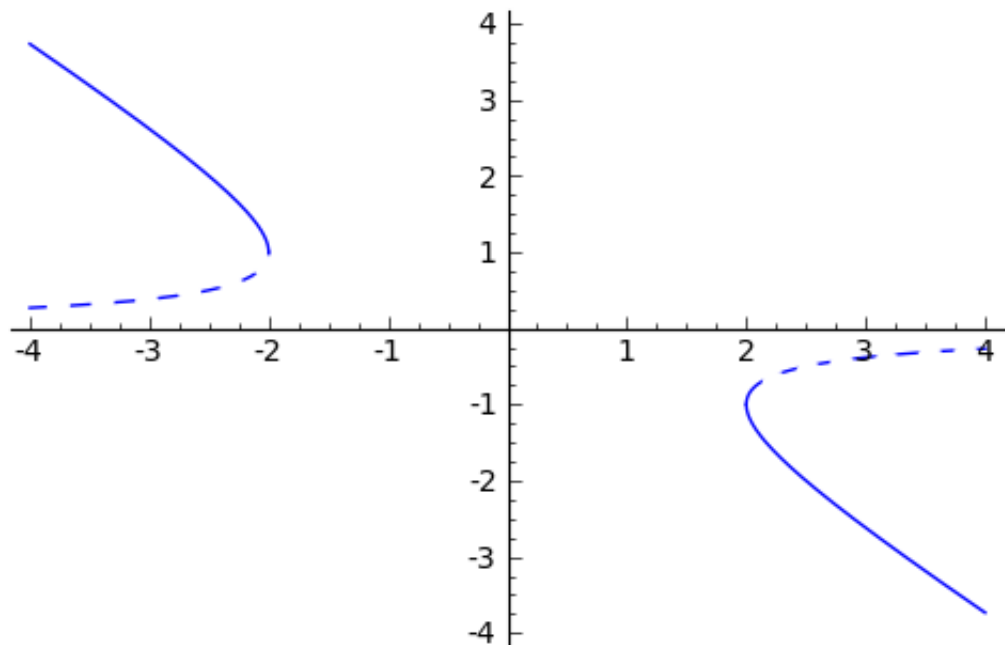
מכאן רואים:

אם $|r| < 2$ אין נקודות שבת.
 אם $|r| = 2$ יש נקודת שבת אחת.
 אם $|r| > 2$ יש שתי נקודות שבת.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, r) = r + 2x \Big|_{x = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4}}{2}} = r + 2 \cdot \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4}}{2} = -\sqrt{x^2 - 4} < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, r) = +\sqrt{x^2 - 4} > 0$$

לכן x_1 תמיד יציבה ו- x_2 תמיד לא יציבה.



ביפרקציה מסוג זה נקראת Saddle-Node או בשם יפה יותר Clear Blue Sky.