

מד"ר 1 - תרגול 7

Save a tree - don't write madar

29.11.10

ניתוח גיאומטרי ל פתרונות למד"רים מסדר ראשון

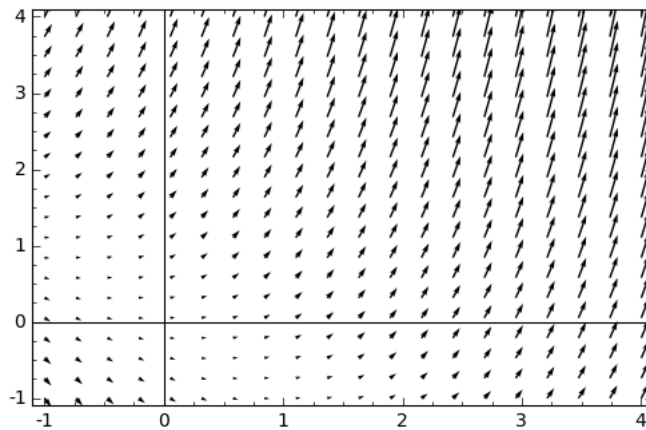
דוגמא.

$$y' = x + y$$

נניח

$$x + y = c$$

$$y = x - c$$



כדי לשרטט עקום פיתרון איכותי נלך לפי החצים.
שיטת אוילר:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = x + y_n$$

$$y_{n+1} = \Delta x(x + y_n) + y_n$$

ואכן הפתרון של המד"ר יהיה אקספוננט (זאת משוואה לינארית).

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = x^8 - y^8 \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

נראה שלכל x :

$$-x < y(x) < x$$

לא משהו שהיינו רוצים לפתור אנליטית.
יש שני קווים מיוחדים בבעיה: $y = x, y = -x$. באופן כללי הם נקראים nulllines - קווים שלאורכם השיפוע הוא 0.
כשהפתרון מתקרב לאחד הישרים, השיפוע שלו שואף להיות 0. מצד שני, השיפוע של הישר הוא 1.
נראה שהפתרון הוא פונקציה מונוטונית עולה.

$$\begin{aligned} x^8 - y^8 &= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \end{aligned}$$

אם $-x < y < x$:

$$x - y > 0$$

$$x + y > 0$$

לכן $x^8 - y^8$ חיובי או 0 (0 רק על הישרים $y = \pm x$) לכן $y' > 0$ לכל x, y בגזרה ו- y מונוטונית.

ממשפט הקיום והיחידות יש פתרון, והפתרון גזיר. נניח ש y מגיע עד הישר $Y = x$ בנקודה (x, y) אז $y' = 0$. אגף ימין של המד"ר הוא רציף לכן בסביבה קטנה של הנקודה (x, y) $x^8 - y^8 \leq \varepsilon$ לכן $y' \leq \varepsilon$, אז,

$$(Y - y)' \geq 1 - \varepsilon$$

ממשפט לגרנז':

$$(Y - y)(x + \Delta x) \geq (1 - \varepsilon)\Delta x$$

$$y(x + \Delta x) \geq (1 - \varepsilon)\Delta x + y(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow Y(x + \Delta x) > y(x + \Delta x)$$

דוגמא.

$$\frac{dx}{dt} = \sin x$$

אפשר לפתור לדוגמא בהפרדת משתנים:

$$\ln |\csc(x) - \cot(x)| = t + c$$

זהות טריגונומטרית:

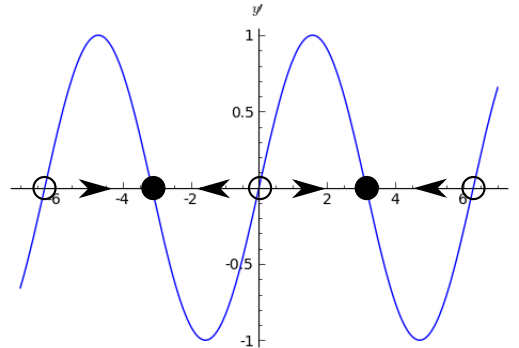
$$\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = t + c$$

נפתור על הקטע בו אפשר להשמיד ערך מוחלט:

$$\tan \frac{x}{2} = e^{t+c}$$

$$x = 2 \tan^{-1}(e^{t+c})$$

רוצים למצוא $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$
אפשר לחשב ונקבל: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi$
עבדנו קשה כדי לקבל את זה.
לעומת זאת:



π נקודת שבת יציבה. אבל אף פעם לא נגיע אליה. מדוע? כי $x \equiv \pi$ הוא פתרון ולכן מעקרון אי-החיתוך הפתרון שלנו (שבברור לא קבוע כי התחיל לפני π) הפתרונות לא יכולים להחתך.

כל פתרון שמתחיל ב- $0 < x_0 < \pi$ מונוטוני עולה חסום ע"י π .

כל פתרון שמתחיל ב- $0 < x_0 < 2\pi$ מונוטוני יורד חסום ע"י π .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi$$

ניתן להראות $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi$ למעשה בגישה הגרפית אפשר לעשות חקירה מלאה של הפתרון. לדוגמא תחומי קמירות-קעירות.

בגישה האנליטית:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x$$

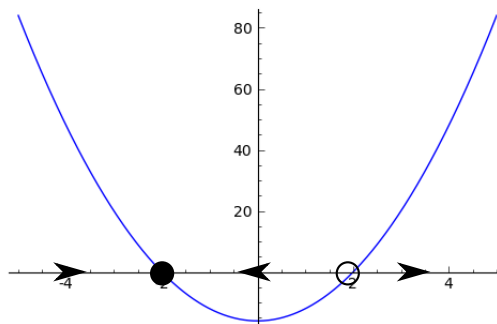
$$\frac{d^2x}{d^2t} = \cos x \cdot \frac{dx}{dt} = \cos x \sin x = \frac{\sin 2x}{2}$$

דוגמא.

$$\dot{x} = 4x^2 - 16$$

$$\frac{dx}{4x^2 - 16} = dt$$

$$\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|^{1/16} = t + c$$

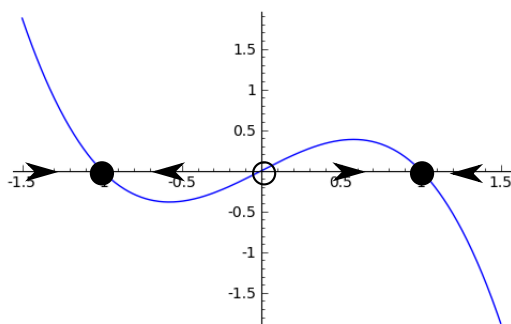


פתרון המתחיל ב- $x_0 < -2$ יקיים $x(t) \rightarrow -\infty$ פתרון המתחיל ב- $x_0 > 2$ יקיים $x(t) \rightarrow \infty$

דוגמא.

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$

$$x - x^3 = x(1 - x)(1 + x)$$



כל הפתרונות של המד"ר חסומים.