

מד"ר 1 - תרגול 6

Save a tree - don't write madar

22.11.10

משפט הקיום והיחידות 2

משפט. (משפט הקיום והיחידות)

תהי $f(x, y)$ רציפה במלבן D וליפשיץ ב- y .
תהי $(x_0, y_0) \in D$. אז קיים אינטרוול I כך ש- $x_0 \in I$ והפתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

מוגדר ויחיד ב- I .

הבעיה היא שהמשפט לוקלי ולא נותן הערכה עד כמה הסביבה I הזאת קטנה. נשתמש בתוספת הבאה:

תוספת. יהי $D_1 \subseteq D$ מלבן סגור.

$$D_1 = \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

$|f(x, y)| \leq M$ ב- D_1 (משפט ויירשטראס מבטיח זאת). נגדיר:

$$h := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

רעיון: ככל שניקח b יותר גדול, נגדיל את המלבן וסביר להניח שגם M יהיה גדול יותר. אז הפתרון לבעיית ההתחלה קיים בקטע $(x_0 - h, x_0 + h)$ וכן $y(x) \subseteq D_1$. כלומר יודעים להעריך את גודל הסביבה שבה יש פתרון, וכן אנחנו יודעים לחסום את הערך של y , כלומר במקרה זה הפתרון לא יכול להתפוצץ.

דוגמא.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי פתרון לבעיית ההתחלה קיים עבור $|t| \leq \frac{1}{2}$ ומקיים $|y| \leq 1$.

הוכחה. בעיה לא לינארית, אנחנו לא יודעים לפתור באופן אנליטי. אבל, בשאלה מסתתר רמז לאיזה מלבן לבחור:

$$D_1 = \{|t| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq 1\}$$

$$M = \max_{D_1} t^2 + e^{-y^2}$$

כפוקנציה של שני משתנים, $t^2 + e^{-y^2}$: ככל שעולים ב- t הערך עולה, וככל שיורדים ב- y הערך עולה. לכן, המקסימיום מתקבל:

$$M = t^2 + e^{-y^2} \Big|_{t=\frac{1}{2}, y=0} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$h = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5/4} \right\} = \frac{1}{2}$$

יתר על כן, משפט הקיום והיחידות מבטיח שבמלבן D_1 מתקיים $|y| \leq 1$ (כי f ליפשיץ ב- y).
□

דוגמא. עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

מצאו את h (כפי שהוגדר במשפט) המקסימלי.

פתרון:

ניקח

$$D_1 = |x| \leq a, \quad |y - 1| \leq b$$

a, b עדיין לא ידועים. נבחין כי $0 < b < 1$. מדוע? כדי שהפתרון לא יתפוצץ. אחרת נגיע ל- $y = 0$ שמאפס את המכנה של $-\frac{x}{y}$.

$$M = \max_{D_1} \left| -\frac{x}{y} \right| = \max_{D_1} \frac{|x|}{y}$$

$|x| \leq a$, מצד אחד,

ומצד שני,

$$|y - 1| \leq b$$

$$-b \leq y - 1 \leq b$$

$$1 - b \leq y \leq 1 + b$$

עם שוויון בנקודה $(x, y) = (a, 1 - b)$.

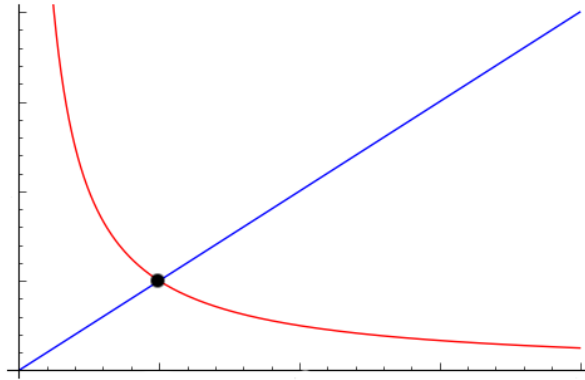
$$M = \frac{a}{1 - b}$$

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ a, \frac{b(1-b)}{a} \right\}$$

$$b(1-b) \leq \frac{1}{4}$$

ומקסימום מתקבל עבור $b = \frac{1}{2}$.

$$h \leq \min \left\{ a, \frac{1}{4a} \right\}$$



המינימום הגדול ביותר יתקבל בנקודת החיתוך:

$$a = \frac{1}{4a}$$

$$4a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

לכן המלבן D_1 מוגדר ע"י $a = b = \frac{1}{2}$.
לכן הפתרון מוגדר עבור:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

אם נפתור את בעיית ההתחלה נקבל:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

תחום קיום הפתרון $-1 < x < 1$. משפט הקיום והיחידות לא פגע, מצד שני הוא הבטיח פתרון לוקלי. לכן, כדי למצוא תחום קיום פתרון מדויק צריך לפתור באופן אנליטי, אבל כמובן שישנם מקרים בהם אפשר למצוא תחום בלי לפתור.

המשכה של פתרונות

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

טענה. הפתרון y קיים לכל $-\infty < x < \infty$.

הוכחה.

$$D_1 = \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

עבור $(x, y) \in D_1$:

$$|x + \sin y| \leq |x| + |\sin y| \leq |x_0| + a + 1$$

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{|x_0| + a + 1} \right\}$$

נבחר $T > 0$ גדול כרצוננו. נגדיר $a = T$

$$b = T(|x_0| + a + 1)$$

$$\frac{b}{M} = \frac{T(|x_0| + a + 1)}{|x_0| + a + 1} = T$$

$$h = \min\{T, T\} = T$$

לכן מוגדר על כל המישור.

ברור שאם $f(x, y)$ חסומה אז הפתרון קיים על כל הישר. כאן, לעומת זאת, ראינו פונקציה לא חסומה שעדיין יש לה פתרון על כל המישור. $\square$

עקרון אי-החיתוך

פשוט אינטרפרטציה של משפט היחידות – שני פתרונות של מד"ר לא יכולים להחתך. המשוואה הלוגיסטית נראית כך:

$$y' = ky(1 - \frac{y}{L})$$

$$K, L > 0$$

טענה. עבור בעיית תנאי התחלה

$$\begin{cases} y' = ky \left(1 - \frac{y}{L}\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$0 < y_0 < L$$

הפתרון $y(x)$ מקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = L$$

הוכחה. נסתכל על $f(y) = ky(1 - \frac{y}{L})$

$$\max_{0 \leq y \leq L} f(y) = f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Lk}{4}$$

לכן f ליפשיץ ברצועה:

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ 0 \leq y \leq L \end{cases}$$

ופתרון שמאותחל ב- (x_0, y_0) $0 < y_0 < L$ יהיה קיים על כל הישר.
עבור $0 < y < L$

$$ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) > 0$$

לכן הפתרון $y(x)$ מונוטוני עולה. נבחין כי $y \equiv 0$, $y \equiv L$ פתרונות למד"ר. לכן פתרון אחר לא יכול לחתוך שני ישרים אלה $y(x) < L$ ממשפט היחידות. לכן היא מונוטונית וחסומה. נניח שהגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = A$$

ובשליה $A < L$. אם x גדול כרצוננו אז $ky(1 - \frac{y}{L})$ קרוב כרצוננו ל- $kA(1 - \frac{A}{L})$, והיות ו- $A > 0$ נקבל $1 - \frac{A}{L} > 0$ לכן,

$$y' \rightarrow kA\left(1 - \frac{A}{L}\right) > 0$$

אבל הפתרון $y(x)$ שואף לפונקציה קבועה וממשפט לגרנז' יש x כך ש- $y(x) > A$. סתירה. $\square$