

מד"ר 1 - תרגול 5

Save a tree - don't write madar

15.11.10

קיום ויחידות

פונקציות ליפשיץ

הגדרה. $f(x)$ תקרא ליפשיץ בקטע $[a, b]$ אם קיים $k > 0$ כל שלכל $x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$$

בינתיים אנחנו עוסקים במשוואות מהצורה:

$$y' = f(x, y)$$

הדרישה היא ש- f רציפה (בשני המשתנים) וליפשיץ ב- y .

דוגמא.

$$f(x, y) = x|y|$$

נראה כי f ליפשיץ ב- y בכל מלבן:

$$D = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$$

הוכחה.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |x|y_2| - x|y_1|| = |x| \left| |y_2| - |y_1| \right|$$

רוצים לבדוק עבור איזה K :

$$|x| \left| |y_2| - |y_1| \right| \leq K|y_2 - y_1|$$

אנחנו מכירים את אי־השוויון הבא:

$$\left| |y_2| - |y_1| \right| \leq |y_2 - y_1|$$

□

נבחר $K = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נפתור בהפרדת משתנים:

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$$

$$y^{-1/3} dy = dx$$

$$\frac{3}{2} y^{2/3} = x + c$$

$$y^{2/3} = \frac{2}{3}(x + c)$$

$$y = \pm \left(\frac{2}{3}(x + c) \right)^{3/2}$$

נציב תנאי התחלה $y(0) = 0$:

$$0 = \pm \left(\frac{2}{3} \cdot c \right)^{3/2}$$

$$c = 0$$

$$y = \pm \left(\frac{3}{2}x \right)^{3/2}$$

לכן אין יחידות.

נראה כי $f(y) = y^{1/3}$ לא ליפשיציאנית בסביבת $y = 0$. יש להראות כי לכל K קיים y_2 כך שאם $0 < y_1 < y_2$ וכן y_2 מספיק קטן (כלומר נמצא בסביבת 0) אז

$$|f(y_2) - f(y_1)| > K|y_2 - y_1|$$

נשתמש במשפט לגרנז':

$$(y')^{1/3} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

$$|f(y_2) - f(y_1)| = f'(c)|y_2 - y_1|$$

$$y_1 < c < y_2$$

בהינתן K ניתן לבחור y_2 כך ש- $\frac{1}{3}y_2^{-2/3} > K$ ומכיון ש- $c < y_2$ נקבל $\frac{1}{3}c^{-2/3} > K$ ולכן K אינו קבוע ליפשיץ.

קירובי פיקרד

הגדרה. עבור

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קירובי פיקרד:

$$\phi_0(t) = y_0$$

$$\phi_{i+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \phi_i(s)) ds$$

נתבונן בדוגמא:

$$\begin{cases} y' = 2t(1 + y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$\phi_0(t) = 0$$

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s(1 + 0) ds = t^2$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!}) ds = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!}$$

באינדוקציה אפשר להראות:

$$\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots + \frac{t^{2n}}{n!}$$

אנחנו יודעים:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots$$

לכן,

$$\phi_n(t) \rightarrow e^{t^2} - 1$$

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = 2t(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y}{1+y} = 2t$$

$$\frac{dy}{1+y} = 2t dt$$

$$\ln|1+y| = t^2 + c_1$$

$$|1+y| = ce^{t^2}$$

$$\pm(1+y) = ce^{t^2}$$

נציב תנאי התחלה $y(0) = 0$:

$$\pm 1 = c$$

בכל מקרה:

$$1+y = e^{t^2}$$

$$y = e^{t^2} - 1$$

נשבור את הרושם שאיטרציות פיקרד נותנות טור טיילור.

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\phi_0(t) = 0$$

$$\phi_1(t) = \int_0^t e^0 ds = t$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t e^s ds = e^t - 1$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t e^{e^s - 1} ds$$

בכלל לא קיבלנו פולינום, בפרט לא את פיתוח טיילור. סדרת הפונקציה הזאת מתכנסת לפתרון הלוקלי אבל יש צורך לחשב אינטגרלים. ואינטגרל כזה אנחנו לא יודעים לחשב. הכוח של משפט הקיום והיחידות הוא בעיקר בתיאוריה, שכן ראינו שיש קצת בעיה לחשב בפועל את האיטרציות.

דוגמא.

$$\begin{cases} y' = ty^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

הפתרון אם נפריד משתנים:

$$y = -\frac{2}{2+t^2}$$

נפתח את הפתרון לטור הנדסי:

$$-\frac{2}{2+t^2} = -\frac{1}{1+\frac{t^2}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^n = -1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{8} - \frac{t^8}{16} + \dots$$

נחשב קירובי פיקרד:

$$\phi_0(t) = -1$$

$$\phi_1(t) = -1 + \int_0^t s(-1)^2 ds = -1 + \frac{t^2}{2}$$

$$\phi_2(t) = -1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{24}$$

המקדם של t^6 לא מתאים לפיתוח טיילור.

$$\phi_3(t) = -1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{8} - \frac{t^8}{24}$$

המקדם של t^6 השתפר אבל עכשיו המקדם של t^8 לא נכון.

נראה כיצד עושים מערכת איטרציות פיקרד על מערכת מד"ר.

דוגמא.

$$\begin{cases} \dot{x} = t + x = f_1(t, x, y) \\ x(0) = 1 \\ \dot{y} = t - x = f_2(t, x, y) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\phi_0(t) = x_0 = 1$$

$$\psi_0(t) = y_0 = -1$$

$$\phi_{i+1}(t) = \phi_0 + \int_0^t f_1(s, \phi_i(s), \psi_i(s)) ds$$

$$\psi_{i+1}(t) = \psi_0 + \int_0^t f_2(s, \phi_i(s), \psi_i(s)) ds$$

$$\phi_1(t) = 1 + \int_0^t (s+1) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + t$$

$$\psi_1(t) = -1 + \int_0^t (s-1) ds = -1 + \frac{t^2}{2} - t$$

$$\phi_2(t) = 1 + \int_0^t (s + 1 + \frac{s^2}{2} + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

$$\psi_2(t) = -1 + \int_0^t (s - 1 - \frac{s^2}{2} - s) ds = 1 - t - \frac{t^3}{8!}$$