

מד"ר 1 - תרגול 4

Save a tree - don't write madar

8.11.10

משוואות מדויקות

אנו יודעים שאוסף כל הנקודות במישור המקיים $\psi(x, y) = c$ נותן עקום. נניח $\psi(x, y) = c$ פתרון של המד"ר (עקומות). הפונקציה הזאת נקראת פונטציאל. באופן שקול, לאורך העקום מתקיים:

$$\frac{d}{dx}\psi(x, y) = 0$$

$$\psi_x + \psi_y y' = 0$$

$$\psi_x + \psi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\psi_x dx + \psi_y dy = 0$$

או במונחי מכפלה סקלרית.

$$(\psi_x, \psi_y) \cdot (dx, dy) = 0$$

לפונקציה שמחזירה זוג סדור מהצורה (ψ_x, ψ_y) נקרא שדה וקטורי. נניח נתון מד"ר מהצורה:

$$Mdx + Ndy = 0$$

אם המשוואה היא מדויקת, קיימת פונקציה ψ שהנגזרת שלה לפי x היא N והנגזרת לפי y היא M .
אם ψ_{xy}, ψ_{yx} קיימות ורציפות אזי ממשפט:

$$\psi_{xy} = \psi_{yx}$$

כלומר

$$N_x = M_y$$

וזהו מאפיין של משוואות מדויקות.

דוגמא.

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

$$M = 3x + y^2 \Rightarrow M_y = 2y$$

$$N = 2xy \Rightarrow N_x = 2y$$

לכן מדוייקת!

$$\psi = \int M dx = \int (2x + y^2) dx = x^2 + xy^2 + c(y)$$

מצד שני

$$2xy = N = \psi_y = 2xy + c'(y)$$

$$c'(y) = 0$$

$$c(y) = c$$

לכן

$$\psi = x^2 + xy^2 + c$$

פתרונות של המד"ר המקורי הם אוסף קווי הגובה של ψ .

דוגמא.

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$$

$$M = y \cos x + 2xe^y$$

$$N = \sin x + x^2e^y - 1$$

$$M_y = \cos x + 2xe^y$$

$$N_x = \cos x + 2xe^y$$

לכן מדוייקת.

$$\psi = \int M dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx = y \sin x + x^2 e^y + c(y)$$

$$\sin x + x^2 e^y - 1 = N = \psi_y = \sin x + x^2 e^y + c'(y)$$

$$c'(y) = -1$$

$$c(y) = -y + c$$

$$\psi = y \sin x + x^2 e^y - y + c$$

גורמי אינטגרציה

תהי

$$M dx + N dy = 0$$

לא מדויקת.
נכפיל ב- μ

$$(\mu M) dx + (\mu N) dy = 0$$

לאיזה μ המשוואה הזאת מדויקת?
נשתמש במאפיין שראינו. אבל כאשר נגזור נקבל משוואה דיפרנציאלית חלקית שקשה לפתור.
כדי לעקוף, נניח לרגע ש- $\mu = \mu(x)$ פונקציה ב- x בלבד.

$$(\mu M)_y = \mu M_y$$

$$(\mu N)_x = \mu' N + \mu N_x$$

במשוואה מדויקת שני הערכים לעיל שווים:

$$\mu M_y = \mu' N + \mu N_x$$

$$\mu' - \frac{M_y - N_x}{N} \mu = 0$$

אנחנו יודעים לפתור רק מד"רים. מתי זה מד"ר? כאשר $\frac{M_y - N_x}{N}$ היא פונקציה של x .
כלומר, התנאי לכך ש- $\mu = \mu(x)$ הוא גורם אינטגרציה:

$$\frac{M_y - N_x}{N} \mu = f(x)$$

דוגמא.

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$M_y = 2y$$

$$N_x = y$$

לא מדוייקת.
מצד שני:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

לכן יש גורם אינטגרציה שתלוי ב- x בלבד.

$$\mu' - \frac{1}{x}\mu = 0$$

יש למד"ר אינסוף פתרונות אבל אנחנו מחפשים גורם אינטגרציה, לכן נבחר פתרון אחד כלשהו. אז נוכל להזניח קבועים ופתרונות סינגולריים.

$$\mu' = \frac{1}{x}\mu$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{x}$$

$$\ln \mu = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

נזרוק את הערך המוחלט.

$$\mu = e^{\ln x} = x$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2 + x^2) = 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$$

מדוייקת, ומכאן אנחנו יודעים להמשיך.

נתבונן ב-

$$Mdx + Ndy = 0$$

לא מדוייקת.

נכפיל ב- μ

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

נניח עכשיו $\mu = \mu(x \cdot y)$

$$\frac{\partial \mu(xy)}{\partial x} = \mu' y$$

$$\frac{\partial \mu(xy)}{\partial y} = \mu' x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \mu' \cdot x \cdot M + \mu \cdot M_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \mu' \cdot y \cdot N + \mu \cdot N_x$$

מד"ר ב- μ ואז

$$\mu' x \cdot M + \mu' M_y = \mu' y N + \mu N_x$$

$$\mu'(xM - yN) + \mu(M_y - N_x) = 0$$

$$\mu' + \frac{M_y - N_x}{xM - yN} \mu = 0$$

מד"ר כאשר

$$\frac{M_y - N_x}{xM - yN} = g(x \cdot y)$$

דוגמא:

$$(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0$$

$$M_y = 3y^2 + 2xy + 1$$

$$N_x = 3x^2 + 2xy + 1$$

לא מדוייקת.

$$\frac{M_y - N_x}{xM - yN} =$$

$$= \frac{3(y^2 - x^2)}{x(y^3 + xy^2 + y) - y(x^3 + x^2y + x)} =$$

$$= \frac{3(y^2 - x^2)}{xy^3 - yx^3} = \frac{3(y^2 - x^2)}{xy(y^2 - x^2)} =$$

$$= \frac{3}{xy}$$

$$u=xy$$

$$\mu'+\frac{3}{u}\mu=0$$

$$\mu(u)=u^{-3}$$

אי־שוויונות אינטגרליים

נניח עבור הקטע $(0,x)$ מתקיים:

$$y''\leq 8H$$

$$y(0)=y_0$$

$$y'(0)=z_0$$

צ"ל

$$y(x)\leq 4Hx^2+z_0x+z_0$$

הוכחה.

$$\int_0^x y'' dx \leq \int_0^x 8H dx$$

$$y'(x) - z_0 \leq 8Hx$$

$$y'(x) \leq 8Hx + z_0$$

$$\int_0^x y' dx \leq \int_0^x 8Hx + z_0$$

$$y(x) - z_0 \leq 4Hx^2 + z_0x$$

□