

מד"ר 1 - תרגול 3

Save a tree - don't write madar

1.11.10

- משוואות לינאריות.

- משוואות ניתנות להפרדה.

- משוואות מדויקות (שיעור הבא).

את אלה אפשר לפתור. יש משפחות של משוואות שניתן למפות באמצעות טרנספורמציה למשוואה שאנחנו יודעים לפתור. לדוגמא משוואות ברנולי אפשר להפוך ללינאריות. נראה היום משפחה נוספת – משוואות הומוגניות שאפשר להפוך למשוואות. ניתנות להפרדה

משוואת ריקטי

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2$$

אין שיטה אנליטית מסודרת שאפשר לפתור בעזרתה. כרגיל, אנחנו מעוניינים בפתרון הכללי. מתברר שאם ידוע פתרון פרטי כלשהו ניתן לקבל ממנו את הפתרון הכללי.

נניח יודעים פתרון פרטי y_1 . נמפה למשוואה לינארית.
נגדיר:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

נגזור:

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

ונציב:

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = f_0 + f_1(y_1 + \frac{1}{u}) + f_2(y_1 + \frac{1}{u})^2$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = (f_0 + f_1y_1 + f_2y_1^2) + \frac{f_1}{u} + \frac{2f_2y_1}{u} + \frac{f_2}{u^2}$$

נכפיל ב- u^2 :

$$u' = -f_1u - 2f_2y_1u - f_2$$

$$u' + (f_1 + 2f_2y_1)u = -f_2$$

קיבלנו משוואה לינארית שאנחנו יודעים לפתור.

משוואות הומוגניות

הגדרה. $f(x, y)$ נקראת הומוגנית אם $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

נראה דוגמא וביחד איך הופכים אותה למשוואה ניתנת להפרדה.

דוגמא.

$$y' = \frac{y - 4x}{x - y}$$

אגף ימין הומוגני מסדר 0.

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 4}{1 - \frac{y}{x}}$$

נבצע החלפה:

$$\frac{y}{x} = v \Leftrightarrow vx = y$$

$$v'x + v = y'$$

$$v'x + v = \frac{v - 4}{1 - v}$$

$$v'x = \frac{v - u}{1 - v} - v$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 4}{x}$$

עכשיו נעשה הפרדת משתנים:

$$\frac{1 - v}{v^2 - 4} dv = \frac{dx}{x}$$

חילקנו ב- $v^2 - 4$ לכן צריך לבדוק פתרון סינגולרי. ואכן, $y = \pm 2x \Leftrightarrow v = \pm 2$ הם פתרונות סינגולריים.

אפילו נחשב את האינטגרלים.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1 - v}{v^2 - 4} dv$$

נפתור בשברים חלקיים:

$$\frac{1 - v}{v^2 - 4} = -\frac{1}{4(v - 2)} - \frac{3}{4(v + 2)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1-v}{v^2-4} dv &= \int -\frac{1}{4(v-2)} - \frac{3}{4(v+2)} dv = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |v-2| - \frac{3}{4} \ln |v+2| = \\ &= \ln \frac{1}{|v-2|^{1/4} |v+2|^{3/4}}\end{aligned}$$

נציב בחזרה:

$$\ln \left(\frac{1}{|v-2|^{1/4} |v+2|^{3/4}} \right) = \ln |x| + c$$

$$\frac{1}{|v-2|^{1/4} |v+2|^{3/4}} = |x|$$

קיבלנו פתרון סתום. היינו רוצים לקבל פתרון מפורש אבל במקרים כמו זה צורה סתומה היא יותר קומפקטית.

מנה של פונקציות לינאריות

נראה שתי דוגמאות, ובהן נסביר את השיקולים שמפעילים.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+y+2}$$

באגף ימין הפונקציות לא הומוגניות, בגלל הקבועים. נראה גישה כללית למנה של שתי פונקציות לינאריות. אם נתייחס למונה ולמכנה כמשוואות של ישרים, וברור שהם לא מקבילים. נבצע החלפה:

$$x+2y+1 = z+2w$$

$$2x+y+2 = 2z+w$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא:

$$x = z - 1$$

$$y = w$$

קיבלנו:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z + 2w}{2z + w}$$

משוואה הומוגנית.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot 1 = \frac{dw}{dz}$$

אם הישרים מקבילים:

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$$

$$y' = -\frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}$$

מה שעשינו קודם לא יעבוד כי המטריצה לא תהיה הפיכה. מצד שני יש לנו הצבה מן המוכן:

$$v = x - 2y$$

$$2y = x - v$$

$$y = \frac{x - v}{2}$$

$$y' = \frac{1 - v'}{2}$$

$$\frac{1 - v'}{2} = -\frac{v + 3}{2v + 5}$$

$$1 - v' = -2 \frac{v + 3}{2v + 5}$$

$$v' = 2 \frac{v + 3}{2v + 5} + 1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v + 6 + 2v + 5}{2v + 5}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4v + 11}{2v + 5}$$

$$\frac{2v + 5}{4v + 11} dv = dx$$

פתרון סינגולרי: $x - 2y = v = -\frac{11}{4}$

$$y = \frac{x + \frac{11}{4}}{2}$$

$$\frac{4v + 10}{4v + 11} dv = 2dx$$

$$1 - \frac{1}{4v + 11} dv = 2dx$$

$$v - \frac{1}{4} \ln |4v + 11| = 2x + c$$

$$v = x - 2y$$

$$x - 2y - \frac{1}{4} \ln |4x - 8y + 11| = 2x + c$$

קילבנו הצגה סתומה.