



מד"ר 1 - תרגול 2

Save a tree - don't write madar

15 בפברואר 2011

משוואות מסדר ראשון

משוואות לינאריות

$$y' + p(t)y = q(t)$$

פתרון:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{h(t)} \left[\int h(t)q(t)dt + c \right] \\ h(t) = e^{\int p(t)dt} \end{cases}$$

קיום הפתרון נובע מקיום הנוסחה עבורו. יחידות - הוכחנו בשיעור ע"י כך שההפרש בין הפתרונות הוא 0.

דוגמא.

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 3$$

אז במקרה זה $p = 2, q = 3$, $h(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$

$$x(t) = e^{-2t} \left[\int e^{2t} 3 dt + c \right] = e^{-2t} \left[\frac{3}{2} \cdot e^{2t} + c \right] = \frac{3}{2} + ce^{-2t}$$

דוגמא.

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t$$

נרצה לפתור ולאחר מכן למצוא תנאי התחלה המפריד בין פתרונות השואפים ל- $-\infty$ לאלו השואפים ל- $+\infty$ עבור $t \rightarrow \infty$.

פתרון:

$$h(t) = e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{2t} \left[\int e^{2t} \cdot (4 - t) dt + c \right] = -\frac{7}{4} + \frac{t}{2} + c \cdot \underbrace{e^{2t}}_{\text{קבוע השאיפה ל-}\pm\infty}$$

אזי,

אם $c \geq 0$ אז $+\infty$

ואם $c < 0$ אז $-\infty$

אז אילו תנאי התחלה יגררו זאת?

הערה. בתנאי התחלה, אם לא מציינים נקודה, אז הכוונה היא ל- $t = 0$.

נדרוש $y(0) = y_0$, נקבל:

$$y_0 = -\frac{7}{4} + c$$

$$c = y_0 + \frac{7}{4}$$

בשביל שאיפה ל- $+\infty$ ניקח $y_0 \geq -\frac{7}{4}$ ובשביל שאיפה ל- $-\infty$ ניקח $y_0 < -\frac{7}{4}$

דוגמא.

$$\begin{cases} ty^2 + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

נפתור ונדון בתכונות הרציפות של הפתרון.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

ב- $t = 0$ מקדם לא רציף. לכן משפט קיום ויחידות אינו תקף.

$$h(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = e^{\ln |t|^2} = t^2$$

והפתרון:

$$y(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \left[\int t^2 \cdot 4t dt + c \right] = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

אז, לכל $c \neq 0$ יש אי-רציפות בפתרון עבור $t = 0$. כלומר, הפתרון "ירש" תכונה מהמשוואה (זוהי תכונה של משוואות לינאריות). נציב תנאי התחלה ונקבל $c = 1$.

משוואות ברנולי

$$y' + p(t)y = q(t) \cdot y^n$$

הערות. • $n \neq 0, 1$ אחרת זאת פשוט משוואה לינארית.

• n לא דווקא טבעי.

נסמן,

$$v = y^{1-n}$$

$$v' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{1-n} y^n v'$$

נציב, ונקבל

$$\frac{1}{1-n} y^n v' + p(t)y = q(t)y^n$$

כאן, $y \neq 0$ לכן:

$$\frac{1}{1-n} v' + p(t) \underbrace{y^{1-n}}_v = q(t)$$

דוגמא.

$$y' = ry - ky^2$$

כאן $n = 2$
והפתרון הוא

$$y = \frac{re^{rt}}{ke^{rt} + c}$$

משוואות ניתנות להפרדה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}$$

דוגמא.

$$y' = y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

שוב, $y \neq 0$,

$$y^{-2} dy = dx$$

$$-y^{-1} = x - c$$

$$y = \frac{1}{c - x}$$

וכן $y \equiv 0$ פתרון סינגולרי.
הפתרון לא רציף ב- $x = c$. למרות שהבעיה כן.

זה בניגוד למשוואות לינאריות שם משפט קיום ויחידות מבטיח שבנקודות בהן הבעיה רציפה קיים ורציף פתרון.
פתרונות סינגולריים – לא במשוואות לינאריות.

דוגמא.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

קיבלנו קשר פונקציונלי בין x ל- y . לפעמים לא נשמך ונשאיר ככה.
נמצא את הקבוע: נציב תנאי התחלה:

$$y(0) = -1$$

$$1 - 2(-1) = c$$

$$c = 3$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$y^2 - 2y + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$(y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

תחת ההנחה שאגף ימין אי שלילי,

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

אלו שתי עקומות פתרון. נציב תנאי התחלה:

$$-1 = 1 + 2 \quad \text{פתרון עבור } + \text{ לא מתאים.}$$

$$-1 = 1 - 2 \quad \text{פתרון עבור } - \text{ מתאים.}$$

לכן הפתרון הוא

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

מה לגבי חיוביות מתחת לשורש?

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2+2)$$

לכן הפתרון תקף רק עבור $x > 2$, ועבור $x = 2$ השורש מתאפס לכן $y = 1$ ולכן המכנה מתאפס ולכן לא מתאים.