

מד"ר 1 - תרגול 13

Save a tree - don't write madar

17.1.11

מערכות מד"ר מסדר I במקדמים קבועים

מערכת הומוגנית

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 6)$$

$$\lambda_{1,2} = -1, -6$$

עבור $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = -6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t}$$

נפתור עבור בעיית תנאי התחלה:

$$x(0) = 3$$

$$y(0) = -2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 4c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

דוגמא עם ערכים עצמיים מרוכבים:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = -4x - 5y \end{cases}$$

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ -4 & -5 - \lambda \end{vmatrix}$$

נרצה פתרון ממשי. נבחר ערך עצמי אחד ונמצא חלק ממשי וחלק מדומה:

$$\lambda = -3 \pm 4i$$

עבור $\lambda = -3 - 4i$:

$$\begin{pmatrix} -1 - (-3 - 4i) & 5 \\ -4 & -5 - (-3 - 4i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 4i & 5 \\ -4 & -2 + 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אחת השורות צריכה לצאת תלויה בשנייה כי רוצים שיהיה גרעין. במרוכבים קשה לראות את זה. אפשר לבדוק דטרמיננטה. במקרה הזה של 2×2 מספיק קשר שמוגדר ע"י אחת השורות.

$$(2 + 4i)x + 5y = 0$$

$$(2 + 4i)x = -5y$$

נציב $x = 5$ ונקבל וקטור עצמי:

$$U(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 - 4i \end{pmatrix} e^{(-3-4i)t}$$

החלק הממשי והחלק המדומה של הפתרון יהיו פתרונות ב"ת.

$$\begin{aligned} V_1(t) = \Re(U(t)) &= \Re\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 - 4i \end{pmatrix} e^{-3t} [\cos 4t - i \sin 4t]\right) = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} \cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \sin 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(t) = \Im(U(t)) &= \Im\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 - 4i \end{pmatrix} e^{-3t} [\cos 4t - i \sin 4t]\right) = \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t} \sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \cos 4t \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 V_1(t) + c_2 V_2(t)$$

דוגמא לערך עצמי יחיד:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -8 \\ -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

נמצא וקטור עצמי:

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \cdot s \cdot t \cdot e^{3t}$$

כאן s הוא ערך עצמי מוכלל. נמצא אותו.

$$s = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot \underline{s} = \underline{V}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 = \frac{1}{2}$$

נקבע $\sigma_2 = 0$, נקבל $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ אז $s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ בסה"כ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t e^{3t}$$

המרת משוואות מסדר גובה למערכות

$$\ddot{y} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = 0$$

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = 6w - 11z + 6y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

ע"ע:

$$\lambda_{1,2,3} = 1, 2, 3$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{3t}$$

אם אנחנו רוצים פתרון של מד"ר מסדר גבוה ניקח את השורה העליונה. אם רוצים פתרון למערכת אז נצטרך את כל הפתרון.