

מד"ר 1 - תרגול 12

Save a tree - don't write madar

10.1.11

פתרון משוואות בעזרת טורים

נעבור עם מד"רים מהצורה

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$p(x), q(x)$ פונקציות אנליטיות בסביבת x_0 . במצב הזה x_0 נקראת נקודה רגולרית. פונקציה אנליטית – פונקציה שניתנת לביטוי כטור חזקות. אפשר לפתור גם כאשר בסביבת x_0 הפונקציות לא אנליטיות אלא מקיימות תנאי אחר. ואז זה מקרה של נקודה רגולרית-סינגולרית שראינו בכיתה והטכניקה שם שונה לגמרי.

דוגמא.

$$y'' - xy' + 4y = 0$$

סביב x_0 .

ננחש פתרון כטור חזקות כללי:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

משיקולי התכנסות במ"ש של טור חזקות מותר לגזור איבר-איבר:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} \stackrel{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (k+1) x^k$$

$$xy' = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^n$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) k x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} (k+1) k x^{k-1} \stackrel{m=k-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1) x^m$$

נציב:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

רוצים לבנות נוסחת רקורסיה שתקשור בין המקדמים a_n .
 $n = 0$:

$$a_2 \cdot 2 \cdot 1 + 4a_0 = 0$$

$$a_2 = -2a_0$$

$n \geq 1$:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n + 4a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{n-4}{(n+2)(n+1)} a_n$$

כאן, a_0 קובע את החזקות הזוגיות ו- a_1 את כל החזקות האי-זוגיות. a_0, a_1 שרירותיים לכן נוכל לבחור אותם כרצוננו. לדוגמא עבור $x=0, a_1=0, a_0=1$ נקבל ש- a_0 חייב להיות תנאי התחלה. באופן דומה $x=0, a_0=0, a_1=1$ נקבל ש- a_1 הוא תנאי התחלה של הנגזרת. יתר על כן, כאן נקבל שני טורים - אחד עם מקדמים זוגיים והשני עם מקדמים אי-זוגיים. נתבונן בהם בנפרד (והם יהיו שני הפתרונות הבלתי תלויים שלנו). בגלל שלמצוא איבר כללי זה לא תמיד יפה ופשוט נחפש כמה איברים התחלתיים.

$$a_4 = \frac{-2}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{-2 \cdot (2a_0)}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{3}$$

$$a_6 = 0$$

לכן כל המקדמים בחזקות הזוגיות החל מ- a_6 הם 0.
 לכן,

$$y_{\text{even}}(x) = a_0 - 2a_0x^2 + \frac{a_0}{3}x^4$$

חזקות אי-זוגיות:

$$a_3 = \frac{-3a_1}{3 \cdot 2}$$

$$a_5 = \frac{-1 \cdot a_3}{5 \cdot 4} = \frac{(-1) \cdot (-3)a_1}{5!}$$

$$a_7 = \frac{1 \cdot a_5}{7 \cdot 6} = \frac{(-1) \cdot (-3)a_1}{7!}$$

$$a_9 = \frac{3 \cdot a_7}{9 \cdot 8} = \frac{(-3)(-1) \cdot 1 \cdot 3a_1}{9!}$$

באופן כללי ל- n אי-זוגי:

$$a_n = \frac{(-3)(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (n-6)}{n!} a_1 = \frac{3(n-6)!!}{n!} a_1 = \frac{3 \cdot (2(n-6))!}{2^{n-6}(n!)^2} a_1$$

$$y_{\text{odd}} = \sum_{n \text{ אי-זוגי}} \frac{3 \cdot (2(n-6))!}{2^{n-6}(n!)^2} a_1 x^n$$

הפתרון הכללי יהיה

$$y = c_1 y_{\text{even}} + c_2 y_{\text{odd}}$$

הערה. כאן, קיבלנו נוסחא כללית לאיברים כללים. על מנת לחשב רדיוס התכנסות בכל המשפטים בחדו"א 2 אנחנו צריכים איבר כללי. כאן מגיע משפט כבד הטוען שעבור

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

אז

$$r \geq [x_0 - R]$$

כאשר R הוא הקוטב הקרוב ביותר ל- x_0 במישור המרוכב. לדוגמא,

$$y'' + \frac{1}{1+x^2}y' + y = 0$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$|x| < 1$$

הסיבה שההתכנסות היא רק עבור $|x| < 1$ נמצאת במישור המרוכב כי שם המכנה מתאפס ב $\pm i$.