

מד"ר 1 - תרגול 11

Save a tree - don't write madar

3.1.11

משוואות לינאריות מסדר גבוה

בשיעורים הקודמים למדנו לטפל במשוואות לינאריות מסדר גבוה הומוגניות. וגם שם רק עם מקדמים קבועים ומשוואות אויילר.

עקרון הסופרפוזיציה

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

אופרטור דיפרנציאלי.

כאשר $p(x), q(x)$ רציפות. נדון כאשר

עקרון הסופרפוזיציה קובע שאם y_1 מקיים $L[y_1] = g_1(x)$ ו- y_2 מקיים $L[y_2] = g_2(x)$ אז $L[y] = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$ מקיימת $y = c_1y_1 + c_2y_2$.
אם y_1, y_2 פתרונות של $L[y] = 0$, וכן, y_p פתרון ל- $L[y_p] = g(x)$ אז הפתרון הכללי נתון ע"י:

$$\underbrace{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)}_{y_h} + y_p(x)$$

דוגמא.

$$y'' - y = 2 - x^2$$

א. בדקו ש- $y = x^2$ פתרון. ב. מצאו פתרון כללי.

א.

$$2 - x^2 = 2 - x^2$$

ב.

כדי למצוא פתרון כללי:

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + x^2$$

שיטת המקדמים הלא ידועים

$$L[y] = y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$$

רוצים למצוא פתרון פרטי.
נציב פולינום שמקדמיו לא ידועים ונמצא אותם.

$$y_p = Ax + B$$

$$(Ax + b)'' + 3(Ax + b)' + 2(Ax + b) = 2Ax + (3A + 2B) = 3x + 1$$

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 3/2 \\ B = -7/4 \end{cases}$$

$$y_p = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

"ככלל" אם $L[y] = p_n(x)$ ננחש פתרון מהצורה

$$y_p = A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0$$

דוגמא.

$$L[y] = y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$$

$$y_p = Ae^{3x}$$

$$9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$A = \frac{1}{20}$$

$$y_p = \frac{e^{3x}}{20}$$

"ככלל" עבור $L[y] = ae^{\alpha x}$ נחש $y_p = Ae^{\alpha x}$

דוגמא.

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

ננסה:

$$y_p = Ae^{4x}$$

$$\underbrace{16Ae^{4x} - 4Ae^{4x} + 12Ae^{4x}}_{=0} = e^{4x}$$

מה הבעיה? הפתרון שניחשנו הוא פתרון הומוגני. ואכן,

$$y'' - y' - 12y = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4, -3$$

ואכן פתרון של ההומוגנית.

מה נוכל לעשות? הניחוש הבא הוא $y_p = Axe^{4x}$:

$$y'_p = A(1 + 4x)e^{4x}$$

$$y''_p = A[4e^{4x} + (1 + 4x)e^{4x}] = A[16xe^{4x} + 8e^{4x}]$$

נציב בחזרה:

$$A(16x + 8)e^{4x} - A(1 + 4x)e^{4x} - 12Axe^{4x} = e^{4x}$$

$$(16A - 4A - 12A)x + 8A - A = 1 + 0 \cdot x$$

$$7A = 1$$

$$A = 1/7$$

$$y_p = \frac{e^{4x}}{7}$$

דוגמא.

$$L[y] = y'' + 3y' + 2y = \sin x$$

$$y_p = A \sin x + B \cos x$$

$$\begin{aligned} L[y_p] &= -A \sin x - B \cos x + 3(A \cos x - B \sin x) + 2(A \sin x + B \cos x) = \\ &= (-A - 3B + 2A) \sin x + (-B + 3A + 2B) \cos x = \cos x \end{aligned}$$

$$(A - 3B) \sin x + (3A + B) \cos x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$$

$$\begin{cases} A - 3B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = \frac{-3}{10} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$$

שיטת המקדמים הלא מסויימים תעבוד כאשר באגף ימין יש מד"ר עם מקדמים קבועים ובאגף ימין יש קוואזי-פולינום.

שיטת וריאציית הפרמטר

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

p, q רציפים.
 $L[y] = 0$ פתרונות ל- y_1, y_2
 רוצים לפתור $L[y] = g(x)$
 מחפשים y_p .

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_p = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \int \frac{1}{w(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} -g(x)y_2(x) \\ g(x)y_1(x) \end{pmatrix}$$

דוגמא.

$$L[y] = y'' + y = \tan x$$

$$L[y] = 0$$

$$y'' + y = 0$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$v_1 = - \int \tan x \sin x dx = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \sin x - \ln |\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int \tan x \cdot \cos x = \int \sin x dx = -\cos x$$

פותרים עד כדי קבועים. יש לנו כבר זוג קבועים בפתרון של הומוגנית לכן אפשר לאפס את הקבועים באינטגרלים.

$$y_p = (\sin x - \ln |\sec x + \tan x| \cos x)$$