

מד"ר 1 - תרגול 10

Save a tree - don't write madar

20.12.10

מד"רים מסדר גבוה

קיום ויחידות: עבור המשוואה

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = q(t)$$

עם $g(t), q(t), p(t)$ רציפות בקטע פתוח I ותנאי התחלה:

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y'_0$$

$$t_0 \in I$$

קיים ויחיד פתרון בקטע I .

כל מד"ר מסדר גבוה אפשר להעביר למערכת מסדר ראשון. ועבורה הוכחנו.

דוגמא. הראה כי $y = \sin(t^2)$ לא יכולה להיות פתרון למד"ר מהצורה

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

כאשר $p(t), q(t)$ רציפות בקטע I המכיל את $t = 0$.

$$y(0) = \sin(0) = 0$$

$$y' = 2t \cos(t^2)$$

$$y'(0) = 0$$

אבל $y \equiv 0$ פתרון למד"ר המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$ ומיחידות לא ייתכן כי $y = \sin(t^2)$ פתרון נוסף.

עקרון הסופרפוזיציה

עבור

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = q(t)$$

אם y_1, y_2 פתרונות אז פתרונות אז עבור $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ גם $c_1 y_1 + c_2 y_2$ הוא פתרון.

הורונסקיאן

תהינה y_1, y_2 פונקציות גזירות:

$$w(y_1, y_2)(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

כמובן ניתן לדבר גם על

$$w(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

תכונות:

• אם $w(y_1, y_2) \neq 0$ אז y_1, y_2 בת"ל.

• אם y_1, y_2 פתרונות עבור:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = q(t)$$

ואם $w(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ אז קיים $c_1 y_1 + c_2 y_2$ פתרון לכל בעית התחלה ב- t_0 .

דוגמא.

$$y_1 = e^{r_1 t}$$

$$y_2 = e^{r_2 t}$$

פתרונות למד"ר מסדר 2.

נראה כי $\{y_1, y_2\}$ קבוצה יסודית (בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר לכל תנאי התחלה).

$$w = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = e^{r_1 t} e^{r_2 t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)t} (r_2 - r_1) \neq 0$$

לכן הורוסנקיאן שונה מ-0 לכל t .

דוגמא.

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$$

$$y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$$

$$y'' + \frac{3}{2t}y - \frac{y}{2t^2} = 0$$

לא רציף ב-0 לכן נדרוש שהפתרון לא יחתוך את ה-0. נניח $t > 0$. לא רציף ב-0 לכן נדרוש שהפתרון לא יחתוך את ה-0. נניח $t > 0$.
הורנסקיאן:

$$w(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} \neq 0$$

הורנסקיאן כבלי לניתוח תלות לינארית

פונקציות הן בלתי תלויות לינארית אם
 y_1, y_2 בת"ל

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0$$

נראה כי $\{e^t, e^{2t}\}$ בת"ל.

$$k_1 e^t + k_2 e^{2t} = 0$$

$$e^t = -\frac{k_1}{k_2}$$

$$t = \ln -\frac{k_1}{k_2}$$

לא לכל t .
משפט Abel

$$(**)y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

y_1, y_2 פתרונות למדר:

$$w(y_1, y_2) = ce^{-\int p(t)dt}$$

$w(y_1, y_2) \neq 0$ $c \neq 0$ לכל t .
 $w(y_1, y_2) \equiv 0$ $c = 0$

כלומר או שהוא זהותית 0 או שהוא לא מתאפס.

דוגמא. הראו כי $y_2 = 3t^2$ $y_1 = 1 - t$ לא יכולים להיות פתרונות למד"ר $(**)$ בקטע המכיל את $t = 0$.

$$w(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 3t^2 \\ -1 & 6t \end{vmatrix} = -3t(t-2)$$

עבור $w = 0$ $t = 0$.

עבור $w \neq 0$ $0 < |t| < \varepsilon$

עבור ε מספיק קטן נקבל נקודת אי רציפות של w בקטע I המכיל את 0. לכן לא מתקיים תנאי $ABEL$.

משוואות אוילר

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$$

נתחיל מהמצב ההומוגני $g(x) = 0$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

$$y = x^r$$

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

$$(ar(r-1) + br + c)x^r = 0$$

שוויון פונקציות לכל x .

עבור $x \neq 0$ נוכל לצמצם

דוגמאות. שורשים ממשיים שונים

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

$0 < x$

$$y = x^r$$

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0$$

$$2r^2 + r - 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$r_1 = -1/2$$

$$r_2 = -1$$

$$y_1 = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}$$

שורש ממשי חוזר

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$$

$$r(r-1) + 5r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

$$r_1 = -2$$

$$y_1 = x^{-2}$$

כדי למצוא פתרון נוסף נשתמש בהורדת סדר. באופן כללי הוא מהצורה: במשוואת אוילר

$$y_2 = y_1 \ln x$$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-2}$$

שורשים מרוכבים:

$$r = \lambda \pm i\mu$$

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x)$$