



מד"ר 1 - הרצאה 9

Save a tree - don't write madar

19.12.10

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x) = P_n(x) \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{2} + e^{-(\alpha-i\beta)x} 2$$

$$y_p = x^s e^{(\alpha+i\beta)x} P_n(x) + x^s e^{(\alpha-i\beta)x} R_n(x)$$

s הריבוי של $(\alpha \pm i\beta)$ כשורש של הפולינום האופייני.
אם רוצים פתרונות ממשים לוקחים את החלק הממשי והמדומה.

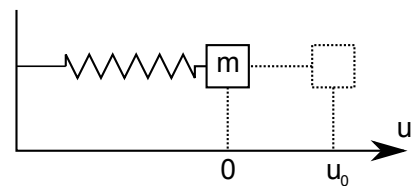
דוגמא.

$$g(x) = x \sin(x) + 2 \cos(x)$$

$$y_p(x) = (A_0 x + A_1) \sin(x) + (B_0 x + B_1) \cos(x)$$

בתנאי ש $\sin x \cos x$ לא פתרונות של המד"ר ההומוגני ($s = 0$).

שימושים



חוק הוק. $F = -ku$

חוק שני של ניוטון $F = ma$

למה קפיץ מעניין אותנו? לדוגמא זה מודל מפושט ועבוד במקרה של אלקטרון.

$$-ku = mu''(t)$$

$$u''(t) + \frac{k}{m}u = 0$$

$$u(0) = u_0$$

$$u'(0) = u'_0$$

$$m, k > 0$$

כוח מחזיר.

$$u'' + w_0^2 u = 0$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

פתרונות:

$$u = A \cos w_0 t + B \sin w_0 t$$

פתרון מחזורי. זמן המחזור $T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ לא תלוי בתנאי התחלה.

נוסיף חיכוך

$$F_D = -cu'(t), \quad c > 0$$

$$mu''(t) + cu'(t) + ku = 0$$

מצפים אינטואיטיבית

1. חיכוך מאוד גדול – מצפים לתנועה מונוטונית לכיוון נקודת השבת.

2. חיכוך מאוד קטן – מצפים לתנועה כמעט מחזורית שהולכת ודואכת לאט.

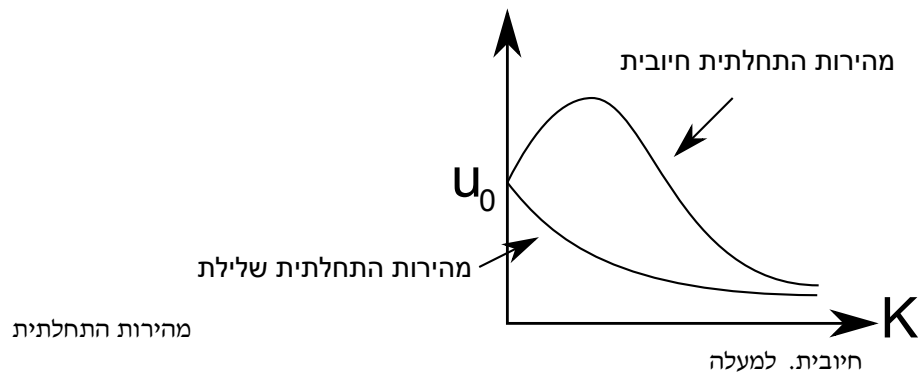
ננסה לקבל את זה מהמתמטיקה. משוואה אופיינית: נציב e^{rt} .

$$mr^2 + cr + k = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

1. חיכוך מאוד גדול - כלומר $c^2 - 4km > 0$. יש שני שורשים ממשיים שליליים. הפתרון יהיה

$$u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad r_1, r_2 < 0$$



מהירות התחלתית שלילית למטה
פתרון דואך לאפס (נקודת שיווי המשקל).

2. חיכוך מאוד קטן - $c^2 - 4m < 0$

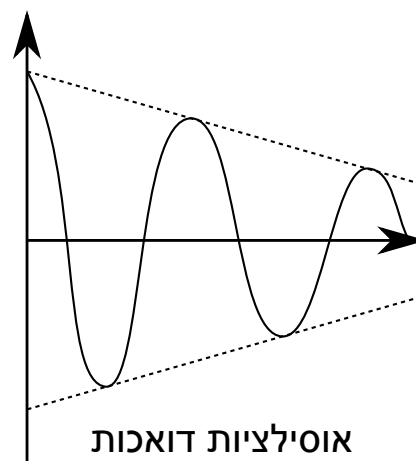
$$r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm i\mu$$

$$\mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}$$

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t))$$



נניח עכשיו, שבנוסף לקפיץ פועל על המסה כוח אילוף חיצוני שהוא מחזורי בזמן.



$$mu'' + cu' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

מקרה 1: אין חיכוך $c = 0$

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

פתרון פרטי: $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{t}{m}}$
אז משיטת המקדמים הלא ידועים נובע ש-

$$y_p = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

נציב:

agemo htiw w ecalper

$$m(-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t) + k(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

$$\cos \omega t(-ma\omega^2 + ka - F_0) + \sin \omega t(-mb\omega^2 + kb) = 0$$

הפונקציות ב"ת לכן אם הקומבינציה שלהן זהותית 0 אזי המקדמים הם 0.

$$\begin{cases} -ma\omega^2 + ka = F_0 \\ -mb\omega^2 + kb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$k = m\omega^2$$

$$a = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

הפתרון הכללי:

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

פתרון מורכב משתי תדירויות:

ω_0 תדר פנימי.

ω תדר האילוף.

תגובה לאילוף: $\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t)}$

תגובה לתנאי התחלה: $c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$

מקרה מעניין 1:

$$\omega \approx \omega_0$$

נניח שהמסה בזמן $t = 0$ היא במנוחה.

$$u(0) = u'(0) = 0$$

מכך נובע (בדקו!)

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$c_2 = 0$$

ולכן,

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t]$$

זהות טריג.

לכן,

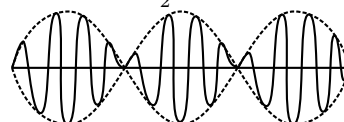
$$u = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t$$

$$\omega \approx \omega_0 \Rightarrow \omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$$

לכן

משתנה לאט $\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t$

משתנה מהר $\sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t$



מקרה מעניין שני:

Beat

כאשר $\omega = \omega_0$
הפתרון מתפוצץ.

$$y_p = t^s [A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t]$$

$s = 1$ כי שורשים מרוכבים באים בזוגות
נציב במד"ר

$$y_p'' + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

$$2 \cdot 1 \cdot (A \cos + B \sin)' - \omega_0^2 y_p + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

$$2(-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

לכן,

$$A = 0$$

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_0}$$

$$y_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} + \sin(\omega_0 t)$$

לכן פתרון כללי

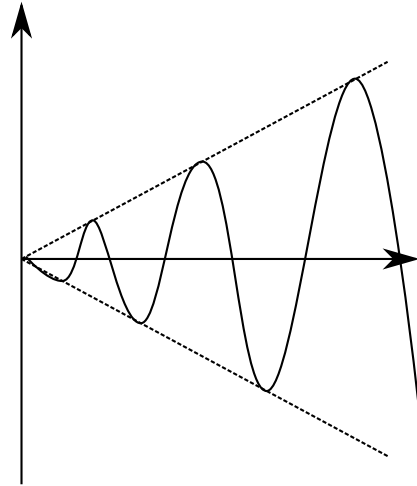
$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

תגובה לתנאי התחלה

$$c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

תגובה לאילוץ

$$\frac{F_0}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$



תהודה (Resonance)

פתרון לא חסום (מתפוצץ).

תהודה einanuseR

מה קורה אם נוסיף חיכוך?

עבור כל ω (שווה או שונה מ- ω_0) מקבלים (בדקו!):

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

פתרון פרטי

$$\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

פתרון של ההומוגני

$$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

פתרון חסום (לא מתפוצץ)

$$\Re(r_1) = \Re(r_2) = -\frac{c}{2m} < 0$$

לכן כאשר

$$t \rightarrow \infty$$

$$u \rightarrow u_p$$

השפעת תנאי ההתחלה נעלמת.

מה קורה כאשר

$$\omega \approx \omega_0$$

-1 c קטן.

$$\frac{F_0}{\sqrt{m}} \gg 1$$

הגברה חזקה של חלון צר של תדרים סביב ω_0 .

חזרנו למתמטיקה!

שיטת וריאצית פרמטרים

עד עכשיו חיפשנו פתרון פרטי עם שיטת המקדמים הלא ידועים. הבעיה היא שהשיטה מוגבלת למקרים ספורים. רוצים שיטה כללית למציאת פתרון פרטי למד"ר לינטרי.

$$(*) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

כאשר ידועים שני פתרונות ב"ת u_1, u_2 של המד"ר ההומוגני.

$$(*)_H \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ראינו שהפתרון הכללי של $(*)_H$ נתון ע"י

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

כאשר c_1, c_2 קבועים.

בשיטת וריאצית הפרמטרים נחפש פתרון פרטי

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$

כלומר מרשים לקבועים להיות פונקציות.

יש לנו אילוץ אחד $(*)$ עבור הפתרון הפרטי ויש לנו שתי דרגות חופש c_1, c_2 . צריך אילוץ נוסף.

נבחר אותו כך שהחישובים יהיו קלים.

נגזור את y_p .

$$y_p'(x) = c_1' \cdot u_1 + c_2' \dot{c}_2 + c_1 \cdot u_1' + c_2 \cdot u_2'$$

כדי להקל על החישובים נדרוש:

$$c_1' \cdot u_1 + c_2' \dot{c}_2 = 0$$

וזה האילוץ השני.

$$y_p''(x) = c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_1 u_1'' + c_2 u_2''$$

נציב y_p', y_p'' ב- $(*)$.

$$c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_1 u_1'' + c_2 u_2'' + p[c_1 \cdot u_1' + c_2 \cdot u_2'] + q[c_1 u_1 + c_2 u_2] = g(x)$$

$$c_1[u_1'' + pu_1' + qu_1] + c_2[u_2'' + pu_2' + qu_2] + c_1' u_1' + c_2' u_2' = g$$

$$c_1' u_1' + c_2' u_2' = g$$

מסקנה:

$$c_1'(x), c_2'(x)$$

מקיימים

$$c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0$$

$$c_1' u_1' + c_2' u_2' = g$$

בצורה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

כי הפתרונות ב"ת.
הפתרון (מכלל קרמר)

$$c_1' = \frac{-u_2 g}{w(u_1, u_2)}$$

$$c_2' = \frac{-u_1 g}{w(u_1, u_2)}$$

לכן קיבלנו

משפט. אם p, q, g רציפות בקטע $\rightarrow \{u_1, u_2\}$ שני פתרונות ב"ת של $(*)_H$ אזי פתרון פרטי של $(*)$ נתון ע"י

$$y_p(x) = -u_1(x) \int^x \frac{u_2(t)g(t)}{w(u_1, u_2)(t)} dt + -u_2(x) \int^x \frac{u_1(t)g(t)}{w(u_1, u_2)(t)} dt$$

$$y_p(x) = \int^x \frac{u_1(t)u_2(x) - u_1(x)u_2(t)}{w(u_1, u_2)(t)} g(t) dt = \int^x \frac{u_1(t)u_2(x) - u_1(x)u_2(t)}{u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)} g(t) dt$$

דוגמא. מצא פתרון פרטי עבור

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

כאן לא נוכל להשתמש בשיטת המקדמים הלא ידועים כי אגף ימין הוא לא מהצורה $P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ לכן נפתור בעזרת וריאצית פרמטרים. פתרונות $(*)_H$:

$$u'' + u = 0$$

$$\{\cos x, \sin x\}$$

$$y_p(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)$$

$$\frac{a_1}{a_1'} \frac{a_2 c_1'}{a_2' c_2'} = \frac{0}{g}$$

$$\frac{\cos x}{-\sin x} \frac{\sin x c_1'}{\cos x c_2'} = \frac{0}{\frac{1}{\cos x}}$$

מכלל קרמר:

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ -\frac{1}{\cos x} & \tan x \end{vmatrix}}{w}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \tan x & -\frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{w}$$

בדקנו $w = 1$

$$c_1' = -\tan x$$

$$c_2' = 1$$

$$c_1 = -\int \tan x = \ln |\cos x|$$

$$c_2 = x$$

$$y_p(x) = \ln |\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

$$y = a \cos x + b \sin x + y_p(x)$$

דוגמא.

$$y'' + y = f(x)$$

במקרה זה (בדקו!):

$$c_1'(x) = -f(x) \sin x$$

$$c_2'(x) = f(x) \cos x$$

לכן,

$$c_1 = - \int^x f(t) \sin t dt$$

$$c_2 = \int^x f(t) \cos t dt$$

ואז

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \int^x f(t) \sin t dt + \sin x \int^x f(t) \cos t dt = \\ &= \int^x (\cos t \sin x - \cos x \sin t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$y_p(x) = \int^x \sin(x-t) f(t) dt$$

הפתרון שמצאנו הוא מהצורה

$$y_p(x) = \int^x G(x, t) f(t) dt$$

$G(x, t)$ פונקציית גרין.

ראינו שאם מקרה הכללי

$$G(x, t) = \frac{u_1(t)u_2(x) - u_1(x)u_2(t)}{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}}$$

טרמינולוגיה:

$f(x)$ אילוץ

$y_p = \int^x G(x, t)f(t)dt$ תגובה לאילוץ

טענה. אם

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t)f(t)dt$$

אז,

$$\begin{cases} y_p(x_0) = 0 \\ y_p'(x_0) = 0 \end{cases}$$

הוכחה.

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t)f(t)dt = 0$$

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^x \frac{d}{dx}G(x, t)f(t)dy + \underbrace{G(x, x)}_{=0}f(x)$$

as das dsa ads s das dsa dsa dsa dsad sadsa

$$y_p'(x_0) = \int_{x_t}^{x_0} \frac{d}{dx}G(x, t)f(t)dy + 0 = 0$$

□

מסקנה. כדי לפתור את בעיית תנאי ההתחלה

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_0'$$

1. נמצא שני פתרונות ב"ת $\{u_1, u_2\}$ של המד"ר ההומוגנית

$$u'' + pu' + qu = 0$$

2. נפרק את הפתרון $y(x)$ לשני רכיבים

3.

4. תגובה לאילוף

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) \cdot g(t) dt$$

שהוא הפתרון של המד"ר הלא הומוגני עם תנאי התחלה

$$y_p(x) = y'_p(x_0) = 0$$

5.

6. תגובה לתנאי ההתחלה

$$u_H(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

כאשר c_1, c_2 הם קבועים הנקבעים מהדרישה ש- u_H מקיים את שני תנאי ההתחלה.

$$\begin{cases} u_H(x_0) = y_0 \\ u'_H(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

7.

8. וזה מקיים מד"ר לא הומוגני + תנאי התחלה לא הומוני.

דוגמא. פתור

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y_p(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

$$u_H(x) = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x$$

$$y = \cos x + \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

$\cos x$ תגובה לתנאי התחלה

תגובה לאילוף

$$Ly = y'' + py' + qy = f(x)$$

נבנה אופרטור לינארי

$$T_G(f) = \int_{x_0}^x G(x, t)f(t)dt$$

$$f \xrightarrow{T_g} y_p(x)$$

$$y_p(x) \xrightarrow{L} f$$

$$T_g = L^{-1}$$

או

$$L \circ T_g = I$$

אם $L = \frac{d}{dx}$ אז ההופכי הוא $L^{-1} \int^x$
אתגר:

$$L(\int_{x_0}^x G(x, t)f(t)dt) = f(x)$$

כל מה שאמרנו לסדר שני אפשר לעשות גם לסדר n .

מד"ר לינארי מסדר n

$$L(y) = y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}y'(x) + P_n y(x) = g(x)$$

משפט. קיום ויחידות

נניח כי $P_i(x), g(x)$ רציפות בקטע I .. תהי $x_0 \in I$. אזי קיים פתרון אחד ויחיד של $L(y) = g$ שפסיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

הגדרה. הפונקציה $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ נקראת בת"ל אם

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

הגדרה. נקראת מערכת יסודית (בסיסית) למד"ר ההומוגני $Ly = 0$ אם

1. $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ הם פתרונות של המד"ר.

2. $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ הם בת"ל.

3. כל פתרון של המד"ר ניתן לכתוב כ-

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$$

הגדרה. ורונסקיאן

$$w(y_1(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

נוסחת אבל

יהיו $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ פתרונות של $Ly = 0$ אזי

$$w(y_1, \dots, y_n) = ce^{-\int^x P_1(t) dt}$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} w'(x) &= \begin{vmatrix} y'_1 \dots y'_n \\ y'_1 \dots y'_n \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$y_i^{(n)} = -P_1 y_i^{(n-1)} + \dots + P_n y_i$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \\
= - \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-k)} & y_2^{(n-k)} & \dots & y_n^{(n-k)} \end{vmatrix} = \\
= -P_1 \cdot w$$

$$w'(x) = -p_1 w$$

□

משפט. יהיו פתרונות של $Ly = 0$ בקטע I . אזי הטענות הבאות שקולות:

$$\{y_1, \dots, y_n\}$$

מערכת יסודית.

קיימת $x_0 \in I$ כך ש- $w(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$

לכל $x \in I$ $w(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$