

מד"ר 1 - הרצאה 8

Save a tree - don't write madar

12.12.10

מד"ר מסדר 2 - המשך

בדרך כלל זה דבר מאוד מסובך ולא ניתן לפתרון. אבל תמיד יש מקרים מיוחדים שאפשר לעשות איתם משהו. לדוגמא משוואה לינארית:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ראינו בשיעור הקודם מה עושים כאשר $p(x), q(x)$ קבועים. אם המקדמים $p(x), q(x)$ פונקציות אז לא תמיד אפשר לפתור. אבל עדיין יש לנו משפט קיום ויחידות - אם המקדמים רציפים על (α, β) . אם $y'(x_0), y(x_0)$ תנאי התחלה נתונים $x_0 \in (\alpha, \beta)$. קיים ויחיד פתרון $y(x)$ המקיים תנאי התחלה. בדרך כלל לא ניתן למצוא פתרון הזה בצורה מפורשת. וזה תמיד ככה במתמטיקה. קיים פתרון ולך חפש אותו. אחד המקרים הבודדים שכן אפשר לעשות משהו הוא:

משוואת אוילר

דוגמא בעלת אופי תיאורתי ומאוד חשובה להמשך.

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0$$

α, β, γ קבועים כאשר $\alpha \neq 0$. זאת לא משוואה מהצורה הכללית. נחלק ב- x^2 .

$$\alpha y'' + \beta \frac{1}{x} y' + \gamma \frac{1}{x^2} y = 0$$

כאן המקדמים כבר לא רציפים ב- $x = 0$. נקודה כזאת נקראת נקודה סינגולרית. לכן אסור להשתמש במשפט קיום ויחידות. אז נחקור בתחום שלא כולל את הנקודה הזאת. נגיד $y(x)$ פתרון אזי בקטע $x > 0$, נגדיר פונקציה חדשה $z(x)$ עבור $x < 0$ ע"י

$$z(x) := y(-x)$$

נבדוק כי $z(x)$ פתרון גם כן.

$$z'(x) = -y'(-x)$$

$$z''(x) = y''(-x)$$

נציב:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 z'' + \beta x z' + \gamma z &= \alpha x^2 y''(-x) - \beta x y'(-x) + \gamma y'(-x) = \\ &= \alpha x^2 y''(-x) + \beta(-x)y'(-x) + \gamma y'(-x) = 0\end{aligned}$$

למעשה זאת הצבה של $(-x)$ ב- y שהוא פתרון.

מסקנה. אם $y(x)$ פתרון של משוואת אוילר עבור $x > 0$ אזי $y(|x|)$ פתרון על כל הציר $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

כעת נתמקד רק בחצי הציר החיובי.
כדי לפתור משוואת אוילר עושים החלפת משתנה $x: x = e^t$.

טענה. במשתנה החדש

$$y(t) = y(e^t)$$

פונקציה $y(t)$ מקיימת משוואה בעלת מקדמים קבועים.

הוכחה. צריך לדעת כלל שרשרת.

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

במקרה שלנו:

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{d}{dx} \right) = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) = x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$y(t) = y(e^t)$$

$$\frac{dy}{dt} = xy'$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x^2 y'' + \frac{dy}{dt}$$

נציב למשוואת אוילר:

$$\alpha x^2 y'' + \beta xy' + \gamma y = 0$$

$$\alpha \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma y = 0$$

נקבל:

$$\alpha \frac{d^2}{dt^2} + (\beta - \alpha) \frac{dy}{dt} + \gamma y = 0$$

וזאת משוואה עם מקדמים קבועים. מה נעשה עכשיו?

$$p(\lambda) = \alpha \lambda^2 + (\beta - \alpha) \lambda + \gamma$$

פולינום $p(\lambda)$ מתקבל כאשר מציבים למשוואה $e^{\lambda t}$.
נשים לב:

$$e^{\lambda t} = (e^t)^\lambda = x^\lambda$$

כלומר, אפשר היה לקבל פולינום $p(\lambda)$ ע"י הצבת x^2 למשוואת אוילר המקורית.

$$\alpha x^2 y'' + \beta xy' + \gamma y = 0$$

$$y = x^2$$

$$\alpha \lambda(\lambda - 1) + \beta \lambda + \gamma$$

נניח פתרנו וקיבלנו $\lambda_{1,2}$ שני שורשים של $p(\lambda)$. ישנם 3 מקרים:

$$1. \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 \rightsquigarrow e^{\lambda_1 t} = |x|^{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 \rightsquigarrow e^{\lambda_2 t} = |x|^{\lambda_2}$$

$|x|^{\lambda_1}, |x|^{\lambda_2}$ פתרונות בלתי תלויים של משוואת אוילר.

$$2. \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ריבוי של שורש.}$$

$$\lambda_1 \rightsquigarrow e^{\lambda_1 t} = |x|^{\lambda_1}$$

גם הפתרון השני מ- λ_1 . מאיפה עוד אפשר לקחת פתרון?

$$\lambda_1 \rightsquigarrow te^{\lambda_1 t} = \ln|x| \cdot |x|^{\lambda_1}$$

פתרונות בלתי תלויים.

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu \quad 3.$$

$$\lambda_{1,2} \rightsquigarrow e^{(\mu+i\nu)t}, e^{(\mu-i\nu)t}$$

כדאי לדעת נוסחת אוילר שכל תלמיד כיתה ח', יודע:

$$e^{(\mu+i\nu)t} = e^{\mu t} \cdot e^{i\nu t} = e^{\mu t} (\cos(\nu t) + y \sin(\nu t))$$

כעת אפשר לכתוב:

$$\lambda_{1,2} \rightsquigarrow e^{\mu t} \cos(\nu t), e^{\mu t} \sin(\nu t)$$

$$t = \ln|x|$$

$$x^\mu \cos(\nu \ln|x|), x^\mu \sin(\nu \ln|x|)$$

□

דוגמא.

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$$

$$4x^2 y'' + y = 0$$

$$y(x) = x^\lambda$$

$$4\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$$

פולינום אופייני.

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$$

$$y_1(x) = |x|^{1/2}$$

$$y_2(x) = \ln |x| \cdot |x|^{1/2}$$

משוואה לינארית מסדר 2 לא הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

אם $g(x) \neq 0$ אז המשוואה לא הומוגנית.
אינטואיציה פיזיקלית – $g(x)$ כוח חיצוני.
נבחין כי:

1. עקרון הסופרפוזיציה – אם

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x)$$

אזי מתקיים:

אם $y_1(x)$ מקיים את המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x)$ ו $y_2(x)$ מקיים את המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = g_2(x)$ אזי $y_1(x) + y_2(x)$ מקיים את המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x)$.

2. מספיק למצוא לפחות פתרון אחד של משוואה לא הומוגנית כדי למצוא את כולם.

נניח שמצאנו $y_p(x)$ פתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית.

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = g(x)$$

נסמן $y(x)$ פתרון כלשהו של משוואה לא הומוגנית. אז נוכל לכתוב

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

נחסר בין שתי המשוואות:

$$(y - y_p)'' + p(x)(y - y_p)' + q(x)(y - y_p) = 0$$

נסמן $z(x) := y(x) - y_p(x)$ אז $z(x)$ פתרון של משוואה הומוגנית, והומוגניות אנחנו יודעים לפתור.

$$z(x) = y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

כאשר $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות בלתי תלויים של המשוואה ההומוגנית.

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

איך נוכל למצוא פתרון פרטי של משוואה לא הומוגמית?
נלמד שתי שיטות.

1. שיטת מקדמים לא ידועים. חסרון - למקדמים קבועים בלבד. יתרון - די (בערבון מוגבל) קלה לחישוב

2. שיטת וריאציה של פרמטרים. יתרון - שיטה כללית לכל משוואה לינארית. חסרון - הרבה יותר קשה לחשב.

שיטת מקדמים לא ידועים

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

a, b, c קבועים. $g(x)$ קווי פולינום (לא ראיתם את זה בא).
מה זה קווי פולינום? משהו מאחת הצורות הבאות:

$$g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

או

$$g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) P_n(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) Q_n(x)$$

או

$$g(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} P_n(x)$$

מעקרון הסופרפוזיציה גם לסכום של כאלה אפשר לפתור.

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

פולינום ממעלה n .

משפט.

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P_n(x)$$

נרשום פולינום אופייני של משוואה הומוגנית:

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

נסמן λ_1, λ_2 שורשים של $p(x)$. אזי קיים פתרון פרטי $y_p(x)$ של משוואה לא הומוגנית בצורה:

$$y_p(x) = x^s \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

כאשר:

$$s = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ אינו שורש של } p(x) \\ 1 & \alpha = \lambda_1 \vee \alpha = \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 2 & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

כלומר s שווה לריבוי של α כשורש של משוואה אופיינית. מקדמים של פולינום $Q(x)$ לא ידועים. צריך למצוא אותם ע"י הצבה של y_p למשוואה.

הוכחה. נעשה שלב שלב.

מקרה ראשון: $\alpha = 0$.

נניח $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 (\Leftrightarrow c \neq 0)$

$$ay'' + by' + cy = P_n(x)$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$y_p = Q_0 + Q_1x + \dots + Q_nx^n$$

$$y'_p = Q_1 + 2Q_2x + \dots + nQ_nx^{n-1}$$

$$y''_p = 2Q_2 + 3 \cdot 2Q_3x + 4 \cdot 3x^2 + \dots + n(n-1) \cdot Q_nx^{n-1}$$

נכפיל משוואה ראשונה ב- c , שנייה ב- b ושלישית ב- a . מתקבלת מערכת משוואות לינארית על המקדמים הלא ידועים Q_i .

$$x^n \quad cQ_n = P_n$$

$$x^{n-1} \quad cQ_{n-1} + bnQ_n = P_n - 1$$

$$x^{n-2} \quad cQ_{n-2} + b(n-1)Q_{n-1} + an(n-1)Q_n = P_{n-2}$$

$\vdots$

באופן רקורסיבי ניתן למצוא כל המקדמים Q_n .

מקרה שני:

$$\alpha = 0, c = 0, b \neq 0$$

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda = 0$$

תנאי $b \neq 0$ מבטיח $\lambda_1 \neq \lambda_2$ כאן $s = 1$.

$$y_p = xQ_n(x) = Q_n x^{n+1} + Q_{n-1} x^n + \dots + Q_0 x$$

פותרים בצורה רקורסיבית כמו קודם.

מקרה שלישי: $\alpha = 0, c = 0, b = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 0$, לכן, $s = 2$.

$$y_p = x^2 Q_n(x) = Q_0 x^{n+2} + Q_{n-1} x^{n+1} + \dots + Q_0 x^2$$

□

גם פה אפשר לפתור מערכת לינארית בצורה רקורסיבית.

מה קורה כאשר $\alpha \neq 0$?

נראה אחרי הדוגמא:

דוגמא.

$$y'' + 3y' = 6x$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$$

כאן $\alpha = 0$ ולכן α הוא בן השורשים מריבוי 1, $s = 1$.

$$y_p(x) = x(Ax + B)$$

$$y'_p = 2Ax + B$$

$$y''_p = 2A$$

$$(6A)x + 3B + 2A = 6x$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3B + 2A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

לכן,

$$y_p = x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

דוגמא.

$$y'' - 3y' - 4y = 7$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$$

גם כאן $\alpha = 0$ לכן איננו שורש $s = 0$. אזי,

$$y_p = c$$

$$-4c = 7$$

$$c = -\frac{7}{4}$$

יכולנו לנחש בלי שום משפט. אבל המשפט אומר מה לנסות לנחש.

מה נעשה אם $\alpha \neq 0$?

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$$

נחפש,

$$y_p(x) = e^{\alpha x} z(x)$$

נראה שפונקציה $z(x)$ מקיימת משוואה דומה אבל כאשר $\alpha = 0$.

$$y'_p(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} + e^{\alpha x} z' = e^{\alpha x} (z' + \alpha z)$$

$$y''_p(x) = e^{\alpha x} (z'' + \alpha z' + \alpha z' + \alpha^2 z) = e^{\alpha x} (z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z)$$

$$e^{\alpha x} P_n(x) = ay''_p + by'_p + cy_p = e^{\alpha x} (az'' + (2a\alpha + b)z' + z(a\alpha^2 + \alpha\beta + c))$$

$z(x)$ מקיימת משוואה מסדר 2:

$$az'' + z'(2a\alpha + b) + z(a\alpha^2 + b\alpha + c) = P_n(x)$$

$$\tilde{b} = 2a\alpha + b$$

$$\tilde{c} = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

מקרה טילדה ראשון: האם $\tilde{c} = 0$, $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$
 לפי מקרה ראשון $s = 0$ ולכן $z(x) = Q_n(x)$
 מקרה טילדה שני: $\tilde{c} = 0, \tilde{b} \neq 0$
 α שורש של פולינום אופייני המקורי $p(x)$.

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$p'(\lambda) = 2a\lambda + b$$

לכן, $\tilde{c} = 0, \tilde{b} \neq 0$
 $p(\alpha) = 0, p'(\alpha) \neq 0$
 לכן, α שורש פשוט של פולינום $p(x)$

$$z(x) = xQ_n(x)$$

מקרה טילדה שלישי:

$$\tilde{c} = 0, \tilde{b} = 0$$

לכן α שורש כפול של $p(x)$ לכן $z(x) = x^2 \cdot Q_n(x)$

דוגמא.

$$y'' - y = xe^{2x} + x^2e^{-x} + 1$$

$$g_1 = xe^{2x}, g_2 = x^2e^{-x}, g_3 = 1$$

קודם נפתור משוואה הומוגנית:

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.
 אפשר לכתוב גם

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cosh(x) + \tilde{c}_2 \sinh(x)$$

כאשר

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

כעת,

$$y_{p_1} = e^{2x}(Ax + B)$$

$$y_{p_2} = e^{-x}x(Ax^2 + Bx + C)$$

$$y_{p_3} = C$$

כמובן שהקבועים שונים בכלל.

$$y_{p_1} = e^{2x}(Ax + B)$$

$$y'_{p_1} = e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$y''_{p_1} = e^{2x}(2A + 4Ax + 4B + 2A)$$

$$e^{2x}(3Ax + 3B + 4A) = e^{2x}(x)$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$B = -\frac{4}{3}$$

דוגמא. של פיזיקאים

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

t משתנה בלתי תלוי.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x$$

משוואת תנודות הרמוניות.

ω_0 התדירות הפנימית של המערכת.

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2$$

$$\omega_0 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

או בקבועים שונים:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

באגף ימין יש קווי-פולינום.

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) P_n(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) Q_n(x)$$

צריך לחפש פתרון פרטי y_p בצורה ל קווי פולינום.

$$y_p(x) = x^s (e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tilde{P}_n(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tilde{Q}_n(x))$$

מקרה 1:

$$y_p(t) = M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t) \quad \text{אם } \omega \neq \omega_0 \quad \text{לא בין השורשים. מחפשים פתרון מהצורה}$$

מקרה 2:

אם $\omega = \omega_0$

$$y_p(t) = t(M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t))$$

$$(1)y' - y = A \cos(\omega t)$$

$$A \cos(\omega t) = A \Re(e^{i\omega t})$$

$$(2)y'' - y = Ae^{i\omega t}$$

אם $y(t)$ פתרון של (2) אזי $\Re y(t)$ פתרון של משוואה (1).
אם $\omega \neq \omega_0$

$$y(t) = e^{i\omega t} \cdot c$$

אם $\omega = \omega_0$

$$y(t) = t \cdot e^{i\omega t} \cdot c$$

נפתור:
אם $\omega \neq \omega_0$

$$y(t) = e^{i\omega t} \cdot c$$

$$y' = c(i\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$y'' = -c\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$y'' + \omega_0^2 y = c(\omega_0^2 - \omega^2)e^{i\omega t} = Ae^{i\omega t}$$

$$c = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$$

$$\Re y(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

אם $\omega = \omega_0$

$$y(t) = cte^{i\omega t}$$

$$y'(t) = e^{i\omega t}(c(i\omega)t + c)$$

$$y'' = e^{i\omega t}(c(-\omega^2)t + 2c(i\omega))$$

$$y'' + \omega y = e^{i\omega t}(2c(i\omega)) = Ae^{i\omega t}$$

$$c = \frac{A}{2i\omega}$$

$$y(t) = \frac{A}{2i\omega} t \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Re y(t) = \Re\left[\frac{A}{2i\omega} t(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\right] = \frac{A}{2i\omega} t \sin(\omega t)$$