

מד"ר 1 - הרצאה 7

Save a tree - don't write madar

28.11.10

מד"ר מסדר 2

מד"ר מסדר שני לינארי:

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

הוכחנו קיום ויחידות בתחום בו פונקציות המקדמים p, g, q הן רציפות. נתחיל במקרה של מד"ר הומוגני: $g(x) \equiv 0$.

$$(*)_H \quad y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$$

נסמן:

$$L[y] := y'' + p(x)y' + q(x)y$$

$L[y]$ נקרא אופרטור דיפרנציאלי.

טענה. L הני"ל הוא אופרטור לינארי, כלומר:

$$1. \quad L[u + v] = L[u] + L[v]$$

$$2. \quad L[c \cdot u] = cL[u]$$

הוכחה.

1.

$$\begin{aligned} L[u + v] &= (u + v)'' + p(u + v)' + q(u + v) = \\ &= u'' + pu' + qu + v'' + pv' + qv = L[u] + L[v] \end{aligned}$$

2. בדקו.

□

מסקנה.

$$L[c_1 u + c_2 v] = c_1 L[u] + c_2 L[v]$$

משפט. עקרון הסופרפוזיציה

אם $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ הם פתרונות של $(*)_H$ אזי לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

הוא גם פתרון של $(*)_H$.

הוכחה.

$$L[y] = L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0$$

□

כלומר אוסף הפתרונות של המדר ההומוגני $(*)_H$ הוא מרחב לינארי. לכן ניתן להפעיל את הכלים של אלגברה לינארית. לדוגמא אפשר לשאול מה המימד של מרחב הפתרונות?

הגדרה. הפונקציות $\{y_h(x)\}_{h=1}^k$ נקראות תלויות לינארית בתחום I אם קיימים קבועים $\{c_h\}_{h=1}^k$ שלא כולם אפס, כך שלכל $x \in I$:

$$\sum_{h=1}^k c_h y_h(x) \equiv 0$$

אחרת הפונקציות נקראות בלתי תלויות לינארית (בת"ל) ב- I .

דוגמא. הפונקציות $\{\sin x, 3 \sin x\}$ ת"ל.

דוגמא. האם $\{e^x, e^{2x}\}$ בת"ל?

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} \equiv 0$$

$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0$$

$$c_1 e^{x_2} + c_2 e^{2x_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & e^{2x_1} \\ e^{x_2} & e^{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיימים c_1, c_2 לא טריוויאליים המקיימים $\Leftrightarrow$

$$0 = \begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{2x_1} \\ e^{x_2} & e^{2x_2} \end{vmatrix} = e^{x_1+2x_2} - e^{x_2+2x_1} = e^{x_1+x_2}(e^{x_2} - e^{x_1}) \neq 0$$

הפתרון היחיד הוא $c_1 = c_2 = 0$ לכן, $\{e^x, e^{2x}\}$ בת"ל.

דוגמא. הפונקציות $\{x, |x|\}$ הם ת"ל למשל ב- $[-8, 3]$ אבל בת"ל ב- $[-1, 1]$.

הגדרה. נתונה המד"ר הלינארית $(*)_H$. קבוצת הפונקציות $\{y_h(x)\}_{h=1}^k$ תקרא מערכת בסיסית (או יסודית) של פתרונות ל- $(*)_H$ בתחום I , אם:

1. $\{y_h(x)\}_{h=1}^k$ הם פתרונות של המד"ר $(*)_H$ ב- I .

2. $\{y_h(x)\}_{h=1}^k$ הם בת"ל ב- I .

3. כל פתרון של $(*)_H$ ניתן להכתב בצורה הבאה כאשר $\{c_h\}_{h=1}^k$ קבועים:

$$y(x) = \sum_{h=1}^k c_h y_h(x)$$

משפט. נתונה המד"ר הומוגנית מסדר שני:

$$(*)_H = y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$$

אם p, q רציפים בקטע I , אזי למד"ר קיימת מערכת בסיסית בת שני פתרונות.

הוכחה. יהי $x_0 \in I$. ממשפט הקיום והיחידות למד"ר לינארי נובע שקיים פתרון יחיד $y_1(x)$ של $(*)_H$ ב- I המקיים

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ושקיים פתרון יחיד $y_2(x)$ של $(*)_H$ ב- I המקיים:

$$\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

טענה. $y_2(x), y_1(x)$ בת"ל.

כי אם

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

אזי גזירה לפי x נותנת

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$$

נציב x_0 בשני המשוואות הנ"ל

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

טענה. יהי $y(x)$ פתרון של $(*)_H$ ויהי $x_0 \in I$. אזי:

$$y(x) = y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x)$$

נסמן

$$\tilde{y}(x) := y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x)$$

אזי $\tilde{y}$ פתרון של $(*)_H$,

$$\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$$

$$\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$$

□

לכן מיחידות הפתרון $y = \tilde{y}$. לכן $\{y_1, y_2\}$ מערכת בסיסית.

כיצד נבדוק אם $\{y_1, y_2\}$ היא מערכת בסיסית?
יהי $y(x)$ פתרון של $(*)_H$. אם קיימים קבועים c_1, c_2 כך ש-

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

אזי בפרט עבור $x_0 \in I$,

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix}$$

אז $\{y_1, y_2\}$ היא פורשת אם קיימים $\{c_1, c_2\}$ לכל $\{y(x_0), y'(x_0)\}$.
וזו נכון $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

הגדרה. הורונסיקאן היא הדטרמיננטה:

$$w(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

לכן הראינו כי,

למה. $\{y_1, y_2\}$ מערכת בסיסית, $\Leftrightarrow$ קיים x_0 כך ש- $w(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$.

דוגמא.

$$y'' + y = 0$$

הם פתרונות. $y = \sin x, \cos x$
האם $\{\sin x, \cos x\}$ היא מערכת בסיסית?

$$w(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

המד"ר הנ"ל ניתן להצגה כ-

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

דוגמא.

$$\begin{cases} 2x^2 y'' + 3xy' - y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

שני פתרונות $y_1 = x^{3/2}, y_2 = \frac{1}{x}$.

$$w(y_1, y_2) = -\frac{3}{2}x^{-3/2} \neq 0$$

לכן, $\{y_1, y_2\}$ מערכת בסיסית.

בשתי הדוגמאות, היה קל לראות האם קיימת נקודה x_0 עבורה הורונסיקאן לא מתאפס. מה נעשה אם הורונסיקאן היא פונקציה מסובכת? פתרון אלגנטי במשפט הבא:

משפט. אם p, q רציפות בקטע I ו- y_1, y_2 פתרונות של $(*)_H$ ב- I , אזי $w(y_1, y_2)$ שווה זהותית אפס או אינו מתאפס בקטע.

הוכחה.

$$-\begin{cases} y_2 \setminus y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_1 \setminus y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + p(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$w' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$w' + pw = 0$$

$$w(x) = ce^{\int^x p(t)dt}$$

□ ולכן, $c \neq 0$ אז $w(x) \neq 0$ לכל x . $c = 0$ אז $w(x) \equiv 0$ לכל x .
נוסחת אבל:

$$w(x) = ce^{\int^x p(t)dt}$$

מסקנה. מתי הורונסקיאן ב"ת x -? כאשר $p \equiv 0$
לכן, $w \equiv -1$ $y'' + y = 0$

מסקנה. הורונסקיאן של שתי מערכות יסודיות שונות של אותו מד"ר נבדלים זה מזה רק בקבוע כפלי.

מסקנה. $\{y_1, y_2\}$ מערכת יסודית של $(*)_H$ ב- $I \Leftrightarrow$ לכל $x \in I$ $w(x) \neq 0$.
הוכחה. קיים x_0 ,
 $w(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow$ מערכת יסודית

□ $\Leftrightarrow$ לכל $x \in I$ $w(x) \neq 0$

לכן כדי לבדוק את $\{y_1, y_2\}$ מערכת יסודית מספיק לבדוק האם הורונסקיאן מאפס בנקודה אחת ב- I .
לסיכום, אם y_1, y_2 פתרונות של $(*)_H$,
 $\{y_1, y_2\}$ מערכת יסודית.
 $\Updownarrow$
 y_1, y_2 בת"ל.
 $\Updownarrow$
 $w(y_1, y_2) \neq 0$ עבור איזשהו x_0 בקטע.
 $\Updownarrow$
 $w(y_1, y_2) \neq 0$ לכל x בקטע I .

איך נפתור מד"ר לא הומוגני מסדר שני?

שיטת הורדת הסדר

$$(*)_H \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

נניח שידוע פתרון לא טריוויאלי y_1 של $(*)_H$. נראה שבאמצעותו ניתן למצוא פתרון שני בת"ל.
כיצד? נציב ב- $(*)_H$

$$y(x) = v(x)y_1(x)$$

$$y'(x) = v'y_1 + vy'_1$$

$$y'' = v''y + 2v'y'_1 + vy''_1$$

נקבל:

$$v''y + 2v'y'_1 + vy''_1 + p(v'y_1 + vy'_1) + q(vy_1) = 0$$

$$v(y''_1 + py_1 + qy_1) + v'(2y'_1 + py_1) + v''y_1 = 0$$

y_1 פתרון לכן,

$$v''y_1 + v'(2y'_1 + py_1) = 0$$

וזוהי מד"ר מסדר ראשון עבור v' .

$$v'' + (p + 2\frac{y'_1}{y_1})v' = 0$$

אבל $p + 2\frac{y'_1}{y_1}$ היא פונקציה ידועה.

$$v'(x) = ce^{-\int^x p(s) + \frac{2y'_1(s)}{y_1(s)} ds} = c \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int^x p}$$

נבחר $c = 1$ כי מספיק למצוא פתרון אחד בת"ל ב- y_1 .
נסמן:

$$z(x) := \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int^x p}$$

$$v'(x) = z(x)$$

$$v(x) = \int^x z(t)dt + c_2$$

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = y_1(x) \left[\int^x z(t)dt + c_2 \right]$$

ואפשר לבחור $c_2 = 0$.

מסקנה. שני פתרונות ב"ת הם

$$\left\{ y_1(x), y_1(x) \int^x z(t)dt \right\}$$

דוגמא. משוואת לז'נדר מסדר 1

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

נחפש פתרון מהצורה $y = x^n$. נציב:

$$(1-x^2)n(n-1)x^{n-2} - 2xnx^{n-1} + 2x^n = 0$$

$$x^n[-n(n-1) - 2n + 2] + x^{n-2}[n(n-1)] = 0$$

כיוון ש- x^n, x^{n-2} ב"ת,

$$\begin{cases} -n(n-1) - 2n + 2 = 0 \\ n(n-1) = 0 \end{cases}$$

אבל רק $n = 1$ מקיים את שתי המשוואות לכן $y = x$ הוא פתרון של (L) .
נשתמש בו למציאת פתרון שני ב"ת.

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x(v)$$

$$y_2' = v + xv'$$

$$y_2'' = 2v' + xv''$$

נציב ב- (L)

$$(1-x^2)[2v' + xv''] - 2x[v + xv'] + 2vx = 0$$

נקבל איברים:

$$v''[x(1-x^2)] + v'[2(1-x^2) - 2x^2] + v[-2x + 2x] = 0$$

קיבלנו מד"ר לינארי מסדר ראשון עבור v' :

$$v''x(1-x^2) + v'[2((1-x^2) - 2x^2)] = 0$$

נחלק ב- $x(1-x^2) (\neq 0, \pm 1)$

$$v'' + v'\left[\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right] = 0$$

$$v' = ce^{-\int \frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}}$$

$$v = \int^x \frac{1}{t^2(t-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

לכן,

$$y_2 = y_1 v(x) = x v(x) = -1 + \frac{x}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$$

נשים לב:

1. $v(x)$ היה לא מוגדר ב- $x=0$, אבל $y_2(x)$ מוגדר היטב שם.

2. $y_2(x)$ לא מוגדר ב- $x = \pm 1$.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y'' = 0$$

כיוון שהמקדמים לא רציפים ב- ± 1 אז קיים סיכוי שהפתרון יהיה קיים שם.

הערה. ניתן לבצע את שיטת הורדת הסדר גם בעזרת הורונסקיאן:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = w(y_1, y_2) = c e^{-\int^x p}$$

בה"כ $c=1$, לכן אם y_1 ידוע קיבלנו את המד"ר עבור y_2 :

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{w}{y_1} = \frac{1}{y_1} e^{-\int^x p}$$

ומקבלים אותו פתרון

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds$$

משוואות הומוגניות מסדר שני עם מקדמים קבועים

$$(*)_H \quad a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

כאשר, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. ממשפט הקיום והיחידות קיימים פתרונות ב- $-\infty < x < \infty$ ננסה פתרון מהצורה $y = e^{rx}$.

$$L[e^{rx}] = e^{rx} L[ar^2 + br + c] = 0$$

פתרון $\Leftrightarrow$

$$l(r) = ar^2 + br + c = 0$$

משוואה אופיינית.

$$l(r) = 0 \Leftrightarrow (*)_H \text{ פולינום אופייני של } l(r) \\ u(x) = e^{rx} \text{ פתרון של } (*)_H$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

מקרה 1: כאשר השורשים ממשיים ופשוטים $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ פתרונות $\{e^{r_1x}, e^{r_2x}\}$ בת"ל.

טענה. הם בת"ל.

1. כמו קודם.

2. שתי פונקציות תלויות $\Leftrightarrow$ אחת היא כפולה של השנייה.

מסקנה. הפתרון הכללי של $(*)_H$ נתון ע"י $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$.

דוגמא.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$l(r) = r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r_{1,2} = 2, 3$$

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

מקרה 2: שורש ממשי כפול: $b^2 - 4ac = 0$

$$r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$$

$y = e^{rx}$ פתרון? כן. מהו הפתרון השני הבת"ל? דרך 1: הורדת סדר. מקרים. ראינו. אפשר גם משהו אחר. דרך 2:

$$L[e^{rx}] = e^{rx}l(r) = e^{rx}a(r - r_1)^2$$

נגזור שני האגפים לפי r .

$$L[xe^{rx}] = ae^{rx}[x(r - r_1)^2 + 2x(r - r_1)]$$

נציב $r = r_1$

$$L[xe^{rx}] = 0$$

מסקנה.

$$y_2 = xe^{rx}$$

פתרון שני ב"ת.

מקרה 3: r_1, r_2 מרוכבים $\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$
 $\{e^{r_1x}, e^{r_2x}\}$ פתרונות אבל מרוכבים.
מכיוון שהמשוואה ממשית רוצים (לפעמים) שני פתרונות ב"ת ממשיים.
גם a, b, c ממשיים אז

$$v_r = v_1^*$$

$$v_1 = \lambda + i\mu$$

$$v_2 = \lambda - i\mu$$

$$y_1 = e^{r_1x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos(\mu x) + i \sin(\mu x))$$

$$y_2 = e^{r_2x} = e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos(\mu x) - i \sin(\mu x))$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\lambda x} \cos(\mu x)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

פתרונות, לכן $\{e^{\lambda x} \cos(\mu x), e^{\lambda x} \sin(\mu x)\}$.

דוגמא.

$$u'' + 9u = 0$$

$$l(r) = r^2 + 9 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda = 0, \mu = 3$$

$$u(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

דוגמא.

$$u'' + u' + u = 0$$

$$l(r) = r^2 + r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\{e^{-x/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-x/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}$$

נשים לב:

$$e^{\lambda x} \cos(\mu x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x + i\mu x})$$

$$e^{\lambda x} \sin(\mu x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x + i\mu x})$$

פתרונות ממשיים למרות ש- $e^{\lambda x + i\mu x}$ פתרון מרוכב.

משפט. אם במד"ר הלינארי

$$L[y] = y'' + py' + qy = 0$$

הפונקציות p, q הן ממשיות ואם $\phi(x) = u(x) + iv(x)$ הוא פתרון מרוכב של המד"ר כאשר u, v ממשיות, אזי $u(x), v(x)$ הם גם פתרונות של המד"ר.

הוכחה.

$$0 = L[\phi] = L[u + iv] = L[u] + iL[v]$$

לכן,

$$L[u] = 0$$

$$L[v] = 0$$

□