



מד"ר 1 - הרצאה 6

Save a tree - don't write madar

21.11.10

Saddle—node bifurcation

דוגמא. שראינו בשיעור הקודם:

$$y' = y^2 \pm r$$

דוגמא. דוגמא יותר מורכבת:
נתבונן במד"ר

$$y' = r - y - e^{-y}$$

ראינו שנקודת ההסתעפות הייתה $r_c = 1, y^* = 0$.
לוקלית ליד נקודת ההסתעפות $y^* = 0 \approx y$ וכן,

$$y' \approx r - y - (1 - y + \frac{y^2}{2}) = r - 1 - \frac{y^2}{2}$$

מאוד דומה לדוגמא הראשונה. למעשה דומה עד כדי המתיחה

$$\begin{aligned} y &\rightarrow y\sqrt{2} \\ r &\rightarrow r + 1 \end{aligned}$$

ונקבל:

$$y' = r - y^2$$

טענה. במקרה של *saddle node bifurcation* לוקלית ליד נקודת ההסתעפות המד"ר הוא "תמיד"
מהצורה $y' = r \mp y^2$.
נאמר שזאת הצורה הנורמלית.

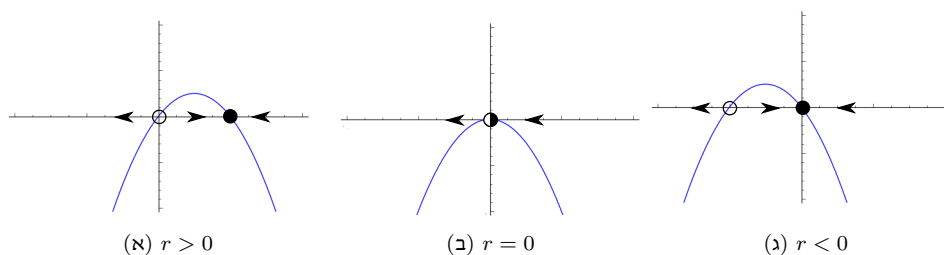
נראה "הוכחה":

כדי ששתי נקודות שבת יתקרבו אחת לשנייה ויעלמו הפונקציה f צריכה להראות כמו פרבולה
ליד נקודת ההסתעפות.

Transcritical bifurcation

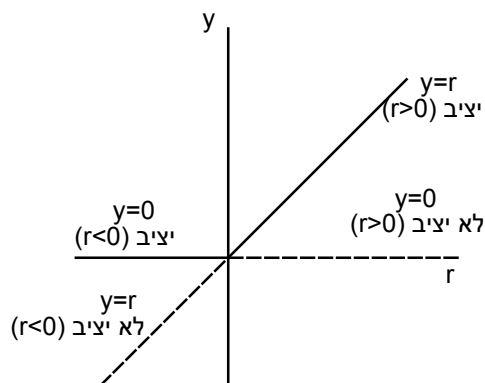
הצורה הנורמלית:

$$y' = ry - y^2 = y(r - y)$$



כאן לא נעלמות נקודות שבת. נקודת שבת ב- $y^* = 0$ נשארת במקומה כאשר r משתנה. אבל היציבות שלה משתנה כאשר r עובר דרך 0.

דיאגרמת הסתעפות:



דוגמא:

$$y' = r \ln y + y - 1$$

$$f = r \ln y + y - 1$$

נשים לב ש $y^* = 1$ היא נקודת שבת לכל r . האם היא משנה את יציבותה?

$$f'(y) = \frac{r}{y} + 1$$

$$f'(y^*) = f'(1) = r + 1$$

לכן אם $r < -1$ יציב ואם $r > -1$ לא יציב.
 לכן ב- $r_c = -1$ ישנה transcritical bifurcation. ואכן, ליד $y^* = 1$ נגדיר $u := y - 1$
 אז,

$$f = r \ln(1 + u) + (1 + u) - 1 \approx r \left(u - \frac{u^2}{2} \right) + u = (r + 1)u - \frac{ru^2}{2}$$

לכן,

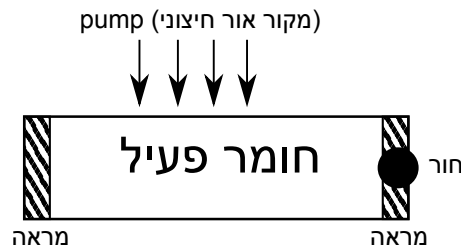
$$u' = y' \approx (r + 1)u - \frac{r}{2}u^2$$

זה לא בצורה נורמלית כי r כופל את u^2 , אבל אם נגדיר $v := r \cdot u$ אז,

$$v' \approx (r + 1)v - \frac{1}{2}v^2$$

וזה כבר בצורה נורמלית עד כדי מתיחה.

דוגמא. סף קריטי של לייזר



מקור אור חיצוני pump מעורר מולקולות של החומר הפעיל לעבור למצב מעורר. כאשר מולקולה חוזרת למצב היסוד היא פולטת פוטון (אנרגיה). נסמן:

• $n(t)$ – מספר הפוטונים.

• $N(t)$ מספר מולקולות במצב מעורר.

• $\frac{dn}{dt} = \text{gain} - \text{loss}$.

stimulated emission היא מצב בו פוטון הפוגש מולקולה במצב מעורר, גורם לה לרדת למצב יציב ותוך כדי כך לשחרר פוטון.

$$\text{gain} \sim nN$$

$$\text{gain} = G \cdot n \cdot N$$

כאשר $G > 0$.

$$\text{loss} = k \cdot n$$

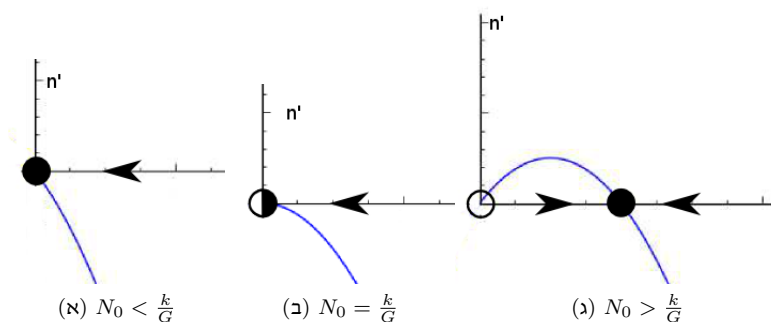
כאשר $k > 0$ בריחת פוטונים מקצה הלייזר.

$$N(t) = N_0 - \alpha n(t)$$

N_0 מספר מולקולות מעוררות כתוצאה מה pump בהעדר stimulated emission אזי,

$$\frac{dn}{dt} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn = (GN_0 - k)n - \alpha Gn^2$$

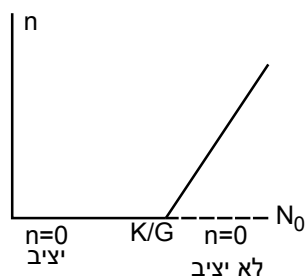
נשרטט את שדה הכיווים אבל רק עבור $n \geq 0$



מקרה א' הינו המקרה היחיד בו n^* יציבה ולכן במקרה זה אין lasing.

$$n^* = \frac{Gn_0 - k}{\alpha G}$$

דיאגרמת יציבות:



מודל פשוט זה מסביר את קיומה של תופעת סף בלייזר.

Pitchfork bifarcations

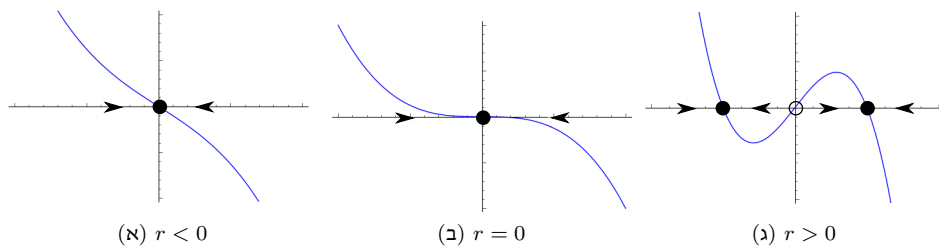
קיים במודלים בהם יש סימטריה בין שמאל לימין.

1. סוג ראשון supercritical pitchfork: צורה נורמלית:

$$y' = ry - y^3$$

במקרה זה סימטריה פירושה שסביב הראשית, התנועות ימינה הם כמו תנועות שמאלה. במילים אחרות, משוואה זו היא אינווריאנטית תחת הטרנספורמציה $y \rightarrow -y$.

$$y' = y(r - y^2)$$

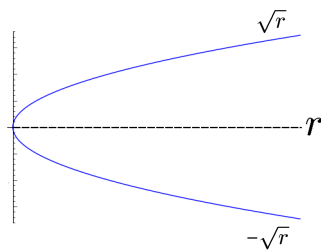


במקרה א' $y^* = 0$ יציבה.

במקרה ב' $y^* = 0$ עדיין יציבה אבל "פחות" - הכוח המחזיר אליה יותר חלש. תופעה זו ידוע תחת השם המפחיד critical slow down.

במקרה ג' $y^* = 0$ יציבה וכן $y^* = \pm\sqrt{r}$ לא יציבות.

bifurcation diagram

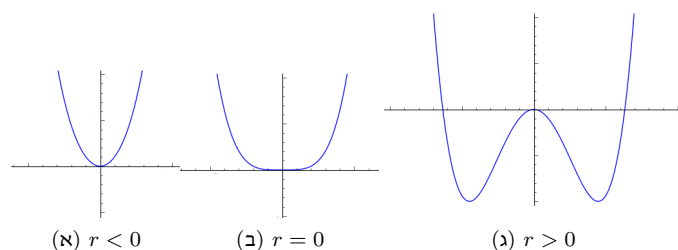


נשרטט את הפוטנציאל עבור:

$$y' = ry - y^3$$

$$f = ry - y^3 = -\frac{dv}{dy}$$

$$v = -\frac{1}{2}ry^2 + \frac{1}{4}y^4$$

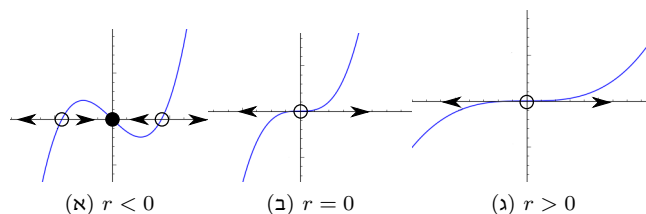


במשוואה $y' = ry - y^3$ האיבר הלא ליניארי y^3 הוא מייצב כי הוא "מושך בחזרה" את y לכיוון $y = 0$.

מה קורה כאשר איבר זה הוא "מערר"? נקבל את הסוג השני של ההסתעפות.

2. הסוג השני הוא subcritical pitchfork bifurcation:

$$y' = ry + y^3 = y(r + y)$$



בשלב זה של הקורס נפסיק לדון בנושא זה. המשך אפשר למצוא, לדוגמא, בספר של Strogatz.

השלמה - משפט קיום ויחידות לשכבה אינסופית

משפט. נתונה השכבה האינסופית:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -\infty \leq y \leq \infty \end{array} \right\}$$

תהי $f(x, y)$ רציפה ב- R ומקיימת את תנאי ליפשיץ, כלומר עבור כל $a \leq x \leq b$ ולכל y_1, y_2 משיים מתקיים:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

תהי $x_0 \in [a, b]$ אזי קיים פתרון אחד ויחיד למד"ר:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

פתרון זה מוגדר על כל הקטע $[a, b]$.

הוכחה. מה ההבדל מהמשפט שהוכחנו? כאן יש לנו פס אינסופי. בניגוד למשפט הקודם כאן $|f|$ לאו דווקא חסומה ב- R . אז פשוט נתקן את ההוכחה שהייתה לנו. נסתכל איפה בהוכחה השתמשנו בכך $|f| \leq M$. שני מקומות: ראשון, כאשר הוכחנו ש- $y_n(x)$ מוגדרת וש- $(x, y_n(x))$ שייך ל- R . אבל עכשיו זה נובע מיידית (באינדוקציה) כי:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

המקום השני הוא כאשר הוכחנו שלכל $x_0 \in [a, b]$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

איך הוכחנו?

$$n = 0$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right|$$

הפונקציה $f(x, y_0)$ רציפה ב- $[a, b]$ ולכן חסומה שם ע"י M . בשלב האינדוקציה כבר לא הסתמכנו על חסימות f אלא רק על $n = 0$.
 לכן עד כדי השינויים הנ"ל ההוכחה שכתבנו בפעם הקודמת תופסת. $\square$

מסקנה. נתונה המד"ר הלינארית:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

ניח ש- $a(x), b(x)$ רציפות בקטע $|x - x_0| \leq \alpha$ אזי לכל y_0 קיים פתרון אחד ויחיד למד"ר הנ"ל הפקייפת $y(x_0) = y_0$
 פתרון זה מוגדר בקטע $|x - x_0| \leq \alpha$ כולו.

הוכחה. הפונקציה $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ רציפה בשכבה האינסופית

$$R = \{|x - x_0| \leq \alpha, -\infty < y < \infty\}$$

בנוסף:

$$|f(x, y_0) - f(x, y_1)| = |a(x)| |y_2 - y_1| \leq L |y_2 - y_1|$$

$$L = \max_{|x-x_0| \leq \alpha} |a(x)|$$

□

האם אפשר להפעיל משפט קיום ויחידות לשכבה אינסופית עבור $y' = y^2$?
 $f(x, y) = y^2$ רציפה, גזירה ברציפות, $\neq$ ליפשיץ על $\mathbb{R}$.

$$|f(y_2) - f(y_1)| = |y_2 - y_1| |y_2 + y_1|$$

ו- $|y_2 + y_1|$ לא חסום.
 ובאמת,

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{1-x}$$

פתרון זה לא קיים בקטע $(-2, 2)$ למרות ש- f גזירה ברציפות.

משוואות מסדר יותר גבוה

אפשרות ראשונה:

מערכת של מד"רים מסדר ראשון:

$$(*) \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_n \end{cases}$$

מקרה שני: מד"ר מסדר n :

$$(**) y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n)})$$

n תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

טענה. ניתן להפוך כל מד"ר מסדר n למערכת מד"רים מסדר 1.

הוכחה. נתון (**).
נגדיר:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ \vdots \\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

ואז

$$\{y_1(x) \dots y_n(x)\}$$

מקיימות את מערכת המד"רים מסדר 1:

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x) \\ \vdots \\ y'_{n-1}(x) = y_n(x) \\ y'_n(x) = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

עם תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_0^{(n+1)} \end{cases}$$

□

זוהי מקרה פרטי של (*).

לכן למשל כדי להוכיח משפט קיום ויחידות עבור מד"ר מסדר n אפשר להוכיח קיום ויחידות עבור מערכת של n מד"רים מסדר ראשון.
נתונה המערכת (*) של n מד"רים מסדר ראשון.
המערכת האינטרגלית השקולה היא

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0^1 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, \dots, y_n) dt \\ \vdots \\ y_n(x) = y_0^n + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1, \dots, y_n) dt \end{cases}$$

נפעיל איטרציית פיקרד:

$$\begin{cases} y_1^{k+1}(x) = y_0^1 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1^k, \dots, y_n^k) dt \\ \vdots \\ y_n^{k+1}(x) = y_0^n + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1^k, \dots, y_n^k) dt \end{cases}$$

נוח מאוד להשתמש ברחיב וקטורי:

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\bar{y}_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$$

ואז למשל איטרציות פיקרד נכתבות בצורה:

$$\bar{y}^{k+1} = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x \bar{f}(x, \bar{y}^k) dt$$

תנאי ליפשיץ

נבחר להשתמש בהגדרה הבאה:

הגדרה. נגדיר ש- $f(x_0, y_1, \dots, y_n)$ פונקציה סקלרית המקיימת תנאי ליפשיץ לפי $y_1, \dots, y_n$ בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ אם עבור כל שתי נקודות ב- D ען אותו ערך x מתקיים:

$$|f(x, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) - f(x, y_1, \dots, y_n)| \leq L_1 |\tilde{y}_1 - y_1| + \dots + L_n |\tilde{y}_n - y_n|$$

כאשר $L_1, \dots, L_n$ קבועים.

למשל אם f גזירה ברציפות בתחום קומפקטי אז f מקיימת את תנאי ליפשיץ שם.

משפט. משפט קיום ויחידות לוקלי למערכת מד"רים
נתונה המערכת:

$$(*) \begin{cases} y_i'(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_0^i \end{cases}$$

עבור $i = 1, 2, 3, \dots, n$ יהי $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ התחום הסגור המוגדר ע"י:

$$|x - x_0| < a$$

$$|y_i - y_0^i| \leq b_i$$

עבור $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
 נניח ש- f_i רציפה בתחום D ומקיימת שם תנאי ליפשיץ לפי $y_1, \dots, y_n$.
 נסמן ב- M את החסם המשותף של $|f_i|$ ב- D . יהי

$$\alpha = \min\{a, \frac{b_1}{M} \dots \frac{b_n}{M}\}$$

אזי קיים פתרון אחד ויחיד של (*) המוגדר בקטע $|x - x_0| \leq \alpha$

□

הוכחה. הוכחה כמו במקרה של מד"ר בודד.

מה קורה עבור מד"ר מסדר n ?

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n+1)})$$

נהפוך למערכת:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

כלומר,

$$f_i(x, y_1, \dots, y_n) = y_{i+1}$$

עבור $i = 1, \dots, n-1$.

$$f_n(x, y_1, \dots, y_n) = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

לכן בשביל להפעיל קיום ויחידות לוקלי, צריך לדרוש ש- f תהיה רציפה וליפשיץ בתחום הסגור D .
 דוגמא:

$$y'' = -yy'^3 - 2x^2y^2$$

$$f(x, y, y') = -yy'^3 - 2x^2y^2$$

נשים לב: מסתכלים על x, y, y' כמשתנים בלתי תלויים.

f רציפה ב- x, y, y' .

f צריכה להיות ליפשיץ ב- y, y' , כלומר,

$$|f(x, y, y') - f(x, \tilde{y}, \tilde{y}')| \leq L_1|y - \tilde{y}| + L_2|y' - \tilde{y}'|$$

האם זה מתקיים?

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -y'^3 - 4x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -3yy'^2$$

הם רציסות ולכן ליפשיץ בתחום קומפקטי.

משפט. משפט קיום ויחידות למד"ר מסדר n
נתון מד"ר

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

עם תנאי התחלה:

$$(*) \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ התחום הסגור:

$$\{|x - x_0| \leq a; |y^{(i)} - y_0^{(i)}| \leq b\}$$

נניח ש- f רציפה בתחום D , $|f| \leq M$ שם, ומקיימת תנאי ליפשיץ לפי $y, y', \dots, y^{n+1}$
אזי קיים פתרון אחד ויחיד ל- $(*)$ בקטע

$$|x - x_0| \leq \alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M + b + \sum_{j=0}^{n-1} |y_0^{(j)}|}\right\}$$

מכאן משפט קיום ויחידות בשכבה אינסופית

$$|x - x_0| \leq a - \infty < y < \infty$$

מזה נובע המשפט הבא:

משפט. משפט קיום ויחידות למערכת לינארית
נתונה המערכת הלינארית:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_11(x)y_1 + a_12(x)y_2 + \dots + a_1n(x)y_n + b_1(x) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_n1(x)y_1 + a_n2(x)y_2 + \dots + a_nn(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

אם המקדמים:

$$\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$$

–ו

$$\{b_i(t)\}_{i=1}^n$$

רציפים בקטע $[a, b]$ אזי לכל $x_0 \in [a, b]$ ולכל $\{y_1^0, \dots, y_n^0\}$ קיים פתרון יחיד למד"ר (*) המקיים

$$y_i(x_0) = y_i^0$$

פתרון זה מוגדר בקטע $a \leq x \leq b$.

ממשפט זה נובע המשפט הבא:

משפט. משפט הקיום והיחידות למד"ר לינארי מסדר n
נתון המד"ר הלינארי:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = b(x)$$

כאשר המקדמים $\{a_i(x)\}_{i=1}^n, b(x)$ רציפים בקטע $[a, b]$.

יהי $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in [a, b]$

אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המד"ר בקטע $a \leq x \leq b$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

מד"ר מסדר 2

$$y'' = f(x, y, y')$$

מקרה 1:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

בעיית תנאי התחלה.

מקרה 2:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

בעיית תנאי שפה.

דוגמא:

מצא את כל הפתרונות של

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

נשים לב $y = \sin x, \cos x$ מקיימים את המד"ר.

$y = \sin x$ מקיים גם את תנאי ההתחלה. לכן $y = \sin x$ הוא פתרון מממשפט ההקיום והיחידות למדר לינארי נובע שזה פתרון יחיד.

דוגמא:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרונות. $y = \sin x, y \equiv 0$

$$y = c \sin x$$

פתרון לכל c . אין יחידות. סתירה? לא כי זו בעיית תנאי שפה.