

מד"ר 1 - הרצאה 5

Save a tree - don't write madar

14.11.10

גישות גרפיות וגיאומטריות

עד כה עבדנו אך ורק בגישה האנליטית: או שפתרנו (בשיטות מתוכמות) או שהוכחנו דברים מגניבים כמו קיום ויחידות. נעשה משהו קצת שונה. נתחיל מהמושג שדה כיוונים.

הגדרה. יהי המד"ר:

$$y' = f(x, y)$$

ונניח כי $y(x)$ פתרון, וניקח נקודה על הפתרון (x, y) . נעביר משיק דרכה. לכן $f(x, y)$ היא שיפוע המשיק בכל נקודה.

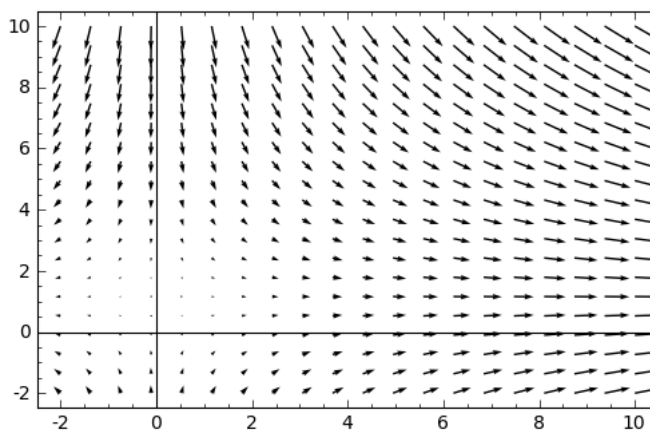
נגדיר:

שדה כיוונים היא פונקציה המתאימה לכל נקודה (x, y) כיוון.

הרעיון: לכל (x, y) נשרטט כיוון שהשיפוע שלו הוא בדיוק $f(x, y)$.

דוגמא.

$$y' = 1 - y$$



עבור $y = 1$ השיפוע הוא 0 עבור $y = 0$ השיפוע הוא 1. $y = -1$ השיפוע הוא 2. מעל ה-1 השיפועים שליליים, $y = 2$ השיפוע הוא -1.

הפתרון בכל נקודה משיק לשדה הכיוונים. אז אפשר לראות בעיניים את צורת הפתרונות לפי הכיוונים.

למשל בדוגמא שלנו רואים שלכל $y(x_0) = y_0$ מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1$$

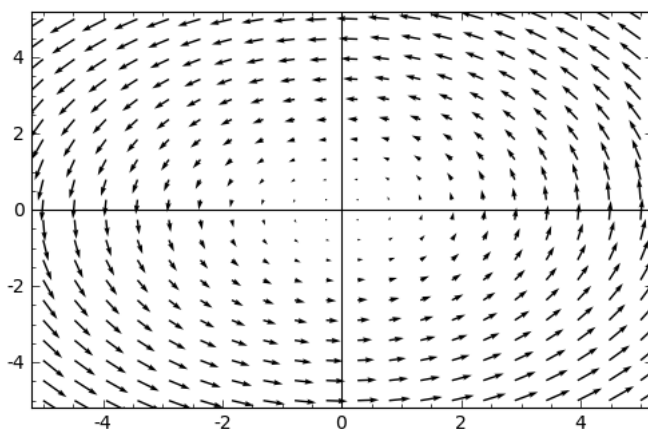
אם $y_0 > 1$ אז הפתרון יורד מונוטוני ל $y = 1$ ועבור $y_0 < 1$ עולה מונוטוני ל- $y = 1$. הטריק הפשוט הזה נותן הרבה אינפורמציה איכותית על הפתרון אבל לא נותן אינפורמציה כמותית (לדוגמא אם יודעים $y(3) = 8$ לא ברור הערך $y(10) = ?$). בשביל כמותית צריך לפתור אנליטית.

דוגמא.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

(x, y) ניצב ל- $(-y, x)$.

כלומר השדה ניצב לוקטור שמחבר עם הראשית.



כעת רואים שהפתרונות

הם מעגלים סביב הראשית.

גישה גיטומטרית

מוטיבציה:

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

אפשר לפתור בהפרדת משתנים:

$$\frac{dy}{dx} = \sin y$$

$$\frac{dy}{\sin y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int dx$$

$$-\ln \left| \frac{1}{\sin y} + \cot y \right| = x + c$$

נציב $y(0) = y_0$:

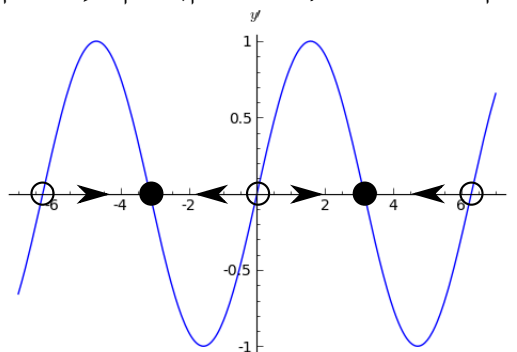
$$-\ln \left| \frac{1}{\sin y} + \cot y \right| = x - \ln \left| \frac{1}{\sin y_0} + \cot y_0 \right|$$

$$x = \ln \left| \frac{\frac{1}{\sin y_0} + \cot y_0}{\frac{1}{\sin y} + \cot y} \right|$$

החדשות הטובות – מצאנו פתרון מפורש. החדשות הרעות – זה "לא עוזר לנו הרבה".
למשל, אם $y_0 = \frac{\pi}{4}$ לא ברור איך הפתרון מתנהג. או למשל מה קורה לפתרון כאשר $x \rightarrow +\infty$? נראה מה נוכל להוציא באמצעות גישה גרפית.

נוח לחשוב על x כעל זמן, על y כעל מיקום ועל $y'(x)$ כעל מהירות.

- שלב 1: נשרטט את y' כפונקציה של y .
שלב 2: נשרטט את כיוון התנועה ע"י חצים על הציר האופקי. חץ פונה ימינה אם $y' > 0$ וחץ פונה שמאלה אם $y' < 0$.
נוח לחשוב על זה כעל זרימה לאורך הציר האופקי. זרימה ימינה אם $y' > 0$ וזרימה שמאלה אם $y' < 0$.
שלב 3: נסמן את הנקודות בהן $y' = 0$ – נקודות שבת. נקודה שלא זזים ממנה עם הזרימה. יש לנו שני סוגים: יציבות ולא יציבות.
א. נקודות שבת (הזרימה אליהן) נסמן בעיגול מלא. $\bullet$
ב. נקודות לא יציבות (הזרימה מהן) נסמן בעיגול ריק. $\circ$



אם $y(0) = \frac{\pi}{4}$ פתרון נע ימינה. הוא מאיץ עד שהוא מגיע ל- $y = \frac{\pi}{2}$ ואז מאט עד שלבסוף מגיע ל- $y = \pi$ מצד שמאל.
למעשה ניתוח "כזה" תופס לכל תנאי התחלה עבורו $y'(0) > 0$.
מה קורה אם $y'(0) < 0$?
אז הפתרון נע שמאלה עד לנקודת השבת הקרובה.
אם $y'(0) = 0$ אז כבר נמצאים בנקודת שבת והפתרון לא יזוז ממנה.

קיבלנו אינפורמציה של שהתקשנו לקבל מהגישה האנליטית.

הגדרה. המד"ר $y' = f(x, y)$ היא אוטונומית אם f ב"ת ב- x .

באופן כללי יש קצת בעיה לצייר פונקציה $f(x, y)$. לכן, נכליל שיטה גרפית רק עבור מד"רים אוטונומיים:

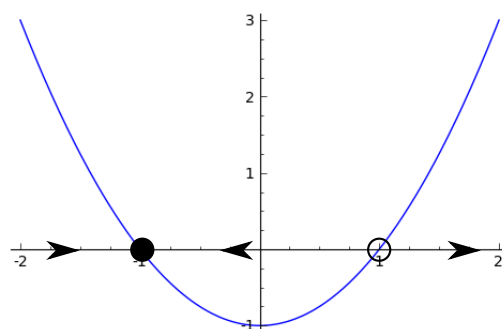
$$y'(x) = f(y)$$

למרות המגבלה זה עדיין משאיר לנו קבוצה די גדולה של מד"רים. באופן גנרי נבצע את השלבים הבאים:

- שלב 1: נשרטט את $f(y)$.
- שלב 2: נשרטט כיווני תנועה על הציר האופקי.
- שלב 3: נסמן נקודות שבת ($f(y) = 0$) כאשר מבדילים בין נקודות שבת יציבות ונקודות שבת לא יציבות.

דוגמא.

$$y' = y^2 - 1$$

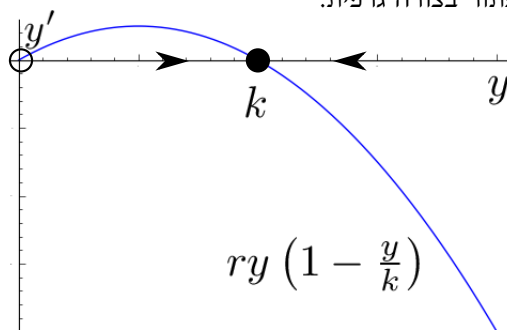


$y = -1$ יציבה אם נזז קצת ממנה נחזור אליה. אבל אם ההפרעה מספיק גדולה כך שהפתרון זז מימין ל- $y = 1$ אז הוא כבר לא יחזור ל- $y = -1$. לכן, נגיד ש- $y = -1$ היא יציבה לוקלית אבל לא גלובלית.

דוגמא. משוואה לוגיסטית

$$\begin{cases} y'(x) = vy \left(1 - \frac{y}{k}\right) \\ v, k > 0 \end{cases}$$

קיבלנו אותה מדינמיקה של גודל האוכלוסיה (רק עבור $y \geq 0$). נפתור בצורה גרפית:



נקודות שבת:

$$f = vy \left(1 - \frac{y}{k}\right) = 0$$

$$y^* = 0, k$$

$$y = 0$$

לא יציבה. נניח ש- $0 < y(0) < K$

$$y' = vy \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

$$y' \sim vy$$

לכן,

$$y \sim y(0)e^{vx}$$

אי יציבות היא אקספוננציאלית.

$$y^* = k$$

יציבה גלובלית.

אם $0 < y(0) < \infty$
אז,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = k$$

זמן הגעה לנקודת שבת

נתעניין בשאלה האם פתרון מגיע לנקודת שבת יציבה בזמן x סופי או אינסופי?

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נניח y^* נקודת שבת יציבה, ונניח קיים $x_0 < x_1 < \infty$ כך ש- $y(x_1) = y^*$.
נתבונן במד"ר

$$\begin{cases} x < x_1 \\ y' = f(y) \\ y(x_1) = y^* \end{cases}$$

למד"ר קיים פתרון $y(x) \equiv y^*$.

ממשפט הקיום והיחידות זה הפתרון היחיד. לכן

$$y(x_1) = y^*$$

לכן,

$$y(x_0) = y^*$$

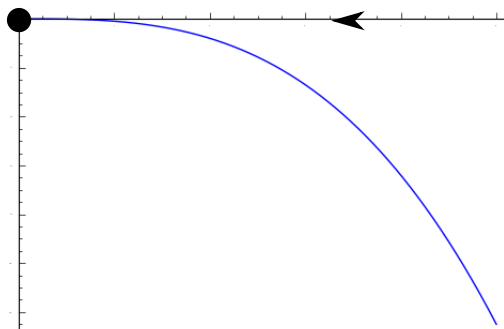
לכן לא ניתן להגיע לנקודת השבת בזמן סופי.
דוגמא:

$$y' = -y^p$$

$p > 0$ ופותרים על חצי הישר $y \geq 0$.

$$f(y) = -y^p$$

$$y^* = 0$$



מישור הפאזה (א)

$y^* = 0$ נקודת שבת יציבה לכל $p > 0$.

נניח $y(0) = 1$.

באיזה p (סופי או אינסופי) הפתרון יגיע לנקודה השבת?
נפתור:

$$\frac{y'}{y^p} = -1$$

$$\frac{1}{1-p} y^{1-p} = -x + c$$

נציב תנאי התחלה

$$= -x + \frac{1}{1-p}$$

$$y^{1-p} = (1-p) \left(-x + \frac{1}{1-p} \right)$$

לכן $y^* = 0$
לכן

$$x^* = \frac{1}{1-p}$$

לכן

$$(*) 0 < x < \infty \Leftrightarrow 0 < p < 1$$

הנחנו $p \neq 1$. נבדוק:

$$y' = -y$$

$$y(0) = 1$$

לכן

$$y = e^{-x}$$

לכן

$$x^* = \infty$$

זוה לא מקלקל את (*).
לכן ניתן להגיע בזמן סופי לנקודת שבת יציבה. מצד שני הוכחנו שאי־אפשר להגיע בזמן סופי לנקודת שבת יציבה. מה קורה פה?
בהוכחה נפנפנו במשפט הקיום והיחידות בנקודת השבת.
בדוגמא שלנו $f = -y^p$

$$f_y = -py^{p-1}$$

לכן, אם $p < 1$ אין יחידות כי f_y אינה חסומה בסביבה של (x^*, y^*) .
מסקנה: אם ניתן להפעיל משפט קיום ויחידות בנקודת השבת אז לא ניתן להגיע לנקודת השבת בזמן סופי.
דרך נוספת להסתכל על זה:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$y(0) = y_0$$

y^* נקודת שבת יציבה. $0 < x^* < \infty$ "זמן ההגעה" לנקודת השבת, כלומר $y(x^*) = y^*$.

נראה טריק כיצד לחשב את x^* .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$x(y^*) - x(y_0) = \int_{y_0}^{y^*} \frac{1}{f(y)} dy$$

$$x^* - x_0 = \int_{y_0}^{y^*} \frac{1}{f(y)} dy \approx \int_{y^* - \varepsilon}^{y^*} \frac{1}{f(y)} dy$$

מצד שני נקרב

$$f(y) = f(y^*) + (y - y^*)f'(y) + \dots$$

$$f(y^*) = 0$$

$$\int_{y^* - \varepsilon}^{y^*} \frac{1}{f(y)} dy \approx \int_{y^* - \varepsilon}^{y^*} \frac{1}{(y - y^*)f'(y^*)} dy$$

מתי זה אינסוף? אם אפשר לעשות טיילור. מתי טור טיילור מוצדק? כאשר $f'(y^*)$ הוא סופי. אם הוא סופי אז $f'(y^*)$ חסומה ולכן f ליפשיץ ואז יש יחידות.

אנליזת יציבות לינארית

עד כה, הבחנו נקודות שבת יציבות ולא יציבות. אבל לעיתים רוצים לדעת הערכה כמותית: כמה יציב או כמה לא יציב.

תהי y^* נקודת שבת. כלומר $f(y^*) = 0$, נניח $y(x)$ קרוב ל- y^* . כמה מהר או לאט $y(x)$ ינוע לכיוון או יתרחק מ- y^* ? נסמן:

$$\eta(x) = y(x) - y^*$$

$$\eta'(x) = y'(x) - 0 = f(y) = fy^* + \eta$$

אם y קרוב ל- y^* אז $1 > \eta$. לכן ניתן לקרב עם טור טיילור

$$f(y^* + \eta) = f(y^*) + \eta f'(y^*) + O(\eta^2)$$

$$\eta'(x) = f'(y^*)\eta + O(\eta^2)$$

אם $f'(y^*) \neq 0$ אז עבור η מספיק קטן $\eta f'(y^*) \gg O(\eta^2)$ ולכן ניתן לקרב מד"ר עבור η ע"י

$$(*)\eta'(x) = f'(y^*)\eta$$

מסתמכים כאן על משפט שציטטנו ולא הוכחנו שהפתרון של מד"ר רציף בפונקציה $f(x, y)$ המשוואה $(*)$ היא לינארית ב- η ולכן התהליך שביצענו נקרא "לינאריזציה" סביב נקודת השבת. פתרון של $(*)$ הוא

$$\eta(x) = \eta(x_0)e^{(x-x_0)f'(y^*)}$$

לכן ההפרעה גדולה אקספוננציאלית אם $f'(y^*) > 0$ (לא יציב) וקטנה אקספוננציאלית אם $f'(y^*) < 0$ (יציב). ואכן, כלומר, היציבות או אי יציבות נקבעת על סמך הסימן של $f'(y^*)$. מידת היציבות או אי-היציבות נקבעת ע"י $|f'(y^*)|$, כלומר כאשר $|f'(y^*)|$ גדול יותר היציבות או אי-היציבות חזקה יותר.

סוגי דינמיקה אפשריים במד"ר אלמנטרי מסדר ראשון

$$y'(x) = f(y)$$

1. תנועה מונוטונית לכיוון נקודת שבת. 2. תנועה מונוטונית לכיוון $y = \pm\infty$. 3. פתרון נשאר קבוע בנקודת השבת. אין עוד אפשרויות. כלומר לא ייתכן ש:
1. פתרון מחזורי. 2. toohsrevo. 3. אוסילציות דואכות. כי כל אלה אינם מונוטוניים.
- למה אי-אפשר פתרונות לא מונוטוניים? כי בזרימה על קו אי אפשר לחזור אחורה. אנלוג מכני: חוק שני של ניוטון

$$m \cdot \ddot{y}(t) = F(y)$$

נוסיף חיכוך.

$$m\ddot{Y} + b\dot{y} = F(y)$$

נניח חיכוך $\gg$ אינרציה.

$$m\ddot{y} \ll b\dot{y}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{b} \cdot F(y)$$

מד"ר מסדר ראשון. לכן ניתן לחשוב על מד"ר מסדר ראשון כעל תנועה של גוף עם חיכוך מאוד גדול שהוא דומיננטי על האינרציה. לכן הפתרון נוטה להעצר בנקודות שבת ולא לעשות אוסילציות או toohsrevo.

פוטנציאל

$$y'(x) = f(y)$$

נניח שהכוח $f(y)$ הוא נגזרת של פונקציית פוטנציאל. כלומר שקיימת פונקציה $V(y)$ כך ש-
 $f(y) = -\frac{dv}{dy}$.
 למה מינוס? כי הכוח פועל בכיוון ירידת הפוטנציאל.
 $y'(x) = -\frac{dv}{dy}$
 אנחנו מצפים שהגוף ינוע למטה עד נקודת מינימום של הפוטנציאל שהיא נקודת שבת יציבה. ואכן,

$$V(x) := V(y(x))$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot -\frac{dv}{dy} = -\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \leq 0$$

לכן, $V(y(x))$ קטן ככל ש- x גדל. ולכן התנועה היא רק כלפי "מטה".
 דוגמא:

$$y' = y - y^3$$

נחשב את הפוטנציאל

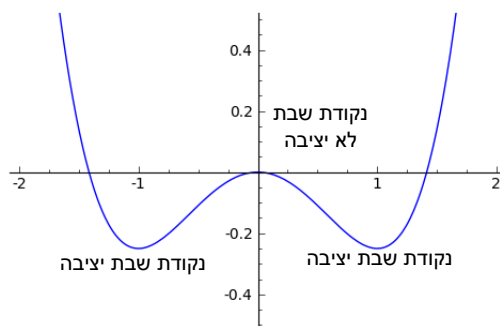
$$\frac{dv}{dy} = -f(y) = -(y - y^3)$$

לכן,

$$V = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 + c$$

בה"כ נבחר $c = 0$ כי הפוטנציאל נקבע עד כדי קבוע.

$$V = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4$$



לפוטנציאל כזה נקרא double-well potential. מבחינה פיזיקלית זה אומר bi-stability. הדינמיקה של $y' = f(y)$ היא מאוד פשוטה כי הפתרונות מונוטוניים.

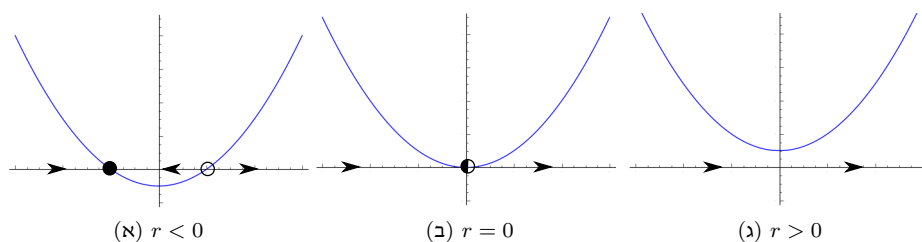
הסתעפויות

snoitacrafiב נניח

$$f = f(y; r)$$

כאשר r הוא פרמטר. רוצים לדעת כיצד דינמיקה משתנה כאשר r משתנה. ראינו שהדינמיקה האיכותית נקבעת על סמך נקודות השבת (מיקומן ויציבותן). לכן, נרצה לדעת כיצד נקודות השבת משתנות כאשר r משתנה. לדוגמא:

$$y' = y^2 + r$$



$$y^* = \pm\sqrt{-r}, r < 0$$

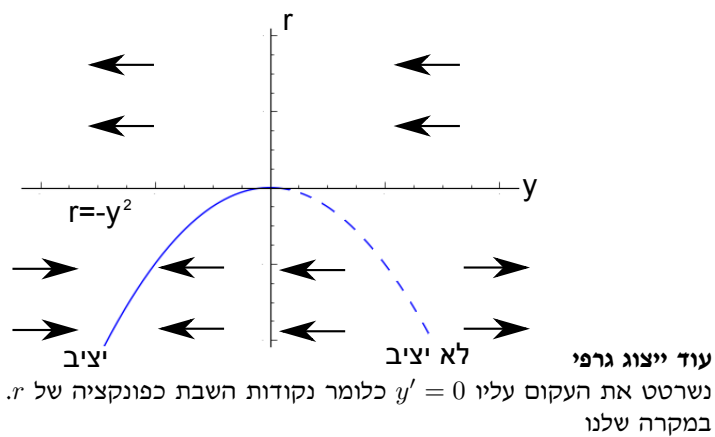
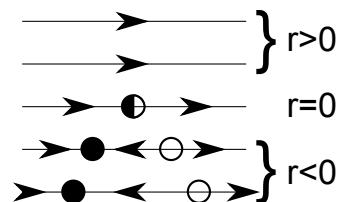
עבור $r = 0$ שתי נקודות השבת מתאחדות לנקודת שבת אחת חצי יציבה.

עבור $r > 0$ אין נקודות שבת.

במקרה זה נגיד שהייתה הסתעפות (ביפרקציה) כי השדה הוקטורי שונה איכותית עבור $r < 0$ ו- $r > 0$.

דיפרקציה זו נקראת saddle-noise bifercation או blue-sky bifercation. כאשר הפרמטר משתנה שתי נקודות השבת נעות אחת לכיוון השנייה, מתנגשות ונעלמות.

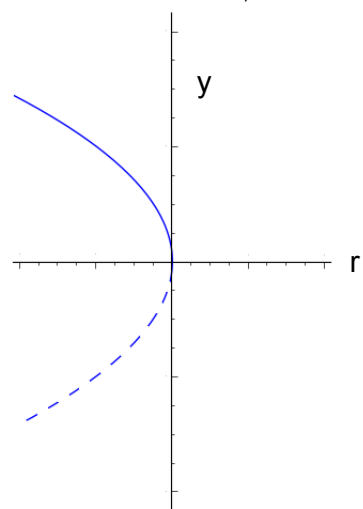
ייצוג גרפי נוסף נשרטט נקודות שבת עבור מספר ערכי r דיסקרטיים.



$$y' = f = y^2 + r$$

$$r = -y^2$$

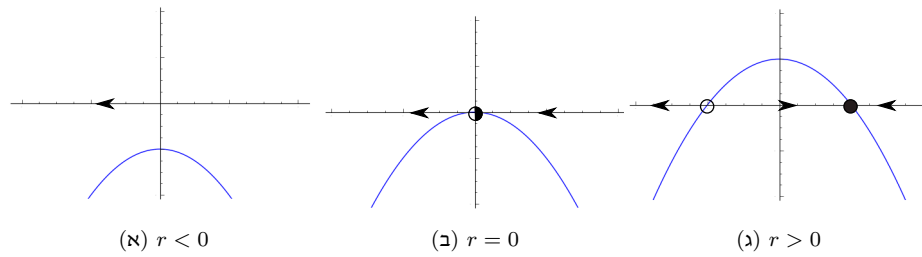
בעצם r הוא משתנה בלתי-תלוי כאשר מנתחים ביפרקציה. לכן מקובל לשרטט את r על הציר האופקי.



bifurcation diagram

דוגמא:

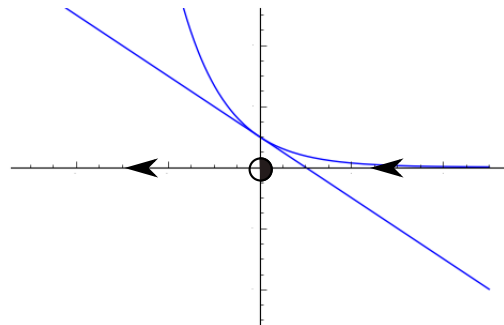
$$y' = r - y^2$$



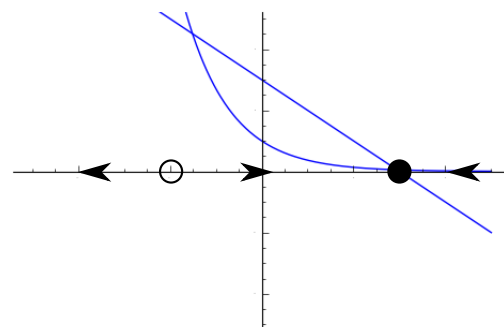
דוגמא:

$$y' = r - y - e^{-y}$$

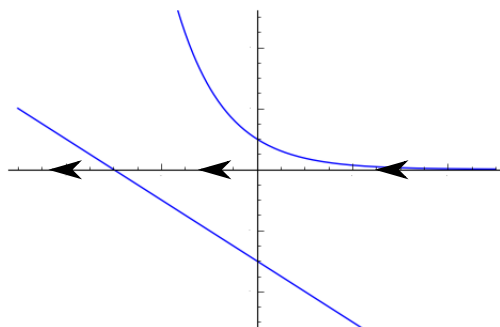
לא ניתן לפתור במפורש עבור $y^*(r)$. עדיין אפשר לעשות אנליזה איכותית: רעיון: נמצא גרפית את נקודות החיתוך של הישר $r - y$ והאקספוננט e^{-y} .



ככל ש- x קטן, שתי נקודות השבת מתקרבות זו לזו. בפרט, קיים r_c שעבור שתי נקודות השבת מתאחדות.



אם $r < r_c$ אין נקודות שבת.



Saddle-node bifurcation

חישוב נקודת הסתעפות:

בנקודת ההשקה לשני העקומים אותו ערך ואותה נגזרת.

$$r_c - y = e^{-y}$$

$$\frac{d}{dy}(r_c - y) = \frac{d}{dy}e^{-y}$$

לכן,

$$-1 = -e^{-y}$$

לכן $y = 0$

לכן $r_c = 1$.