

מד"ר 1 - הרצאה 4

Save a tree - don't write madar

7.11.10

משפט קיום ויחידות

עד סוף השיעור נרצה להוכיח את המשפט הבא:

משפט. יהי R מלבן

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

$f(x, y)$ מוגדרת ורציפה במלבן R ומקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע L .
נסמן:

$$M = \max |f(x, y)|$$

$$m = \min |f(x, y)|$$

אזי בקטע $I = \{|x - x_0| \leq \alpha\}$ קיים למד"ר $y' = f(x, y)$ פתרון אחד ויחיד המקיים $y(x_0) = y_0$.

נתחיל ב-

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

צ"ל $y_n \rightarrow y$

מוכיחים עבור $x_0 < x$

ראינו בשיעור הקודם שהאיטרציות מוגדרות היטב. $y_n(x)$ רציפה b $|y_n(x) - y_0| \leq b$.

טענת עזר. לכל $x \in I$

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) \leq \frac{ML^n(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

הוכחה. באינדוקציה:
בסיס: צ"ל

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{M(x - x_0)}{1}$$

מההגדרה:

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M|x_0 - x|$$

נניח ל- n נוכיח ל- $n+1$.

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \leq \int_{x_0}^x L \frac{ML^{n-1}(t - x_0)^n}{n!} dt = \frac{ML^n(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

□

מסקנה.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n a^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n+1} a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} (e^{LA} - 1) \end{aligned}$$

לכן הסדרה

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{m=0}^{n-1} (y_{m+1}(x) - y_m(x))$$

מתכנסת במ"ש ב- I .
נסמן $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$

ואז $y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$ מתכנסת במ"ש לפונקציה:

$$y(x) = y_0' + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

לכן הוכחנו שקיימת פונקציה $y(t)$ רציפה שמקיימת משוואה אינטגרלית. לכן $y(x)$ פתרון של המד"ר + תנאי ההתחלה.

הוכחנו קיום. נראה יחידות. בעצם כבר הוכחנו בשיעור הקודם. נראה הוכחה אחרת.

הוכחה. נניח $y(x)$ ו- $\bar{y}(x)$ שני פתרונות. לכן שניהם מקיימים משוואה אינטגרלית. לכן,

$$\bar{y}(x) - y(x) = \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y(t)) dt$$

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq L \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y(t)| dt \leq L(x - x_0) \max_{x_0 \leq t \leq x} |\bar{y}(t) - y(t)|$$

נניח תחילה ש $x \in I_n := \{ |x - x_0| \leq \frac{1}{2L} \}$

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq L \frac{1}{2L} \max_{x \in I_n} |\bar{y} - y|$$

זה נכון לכל $x \in I_n$ בפרט עבור ה- x שעבורו מתקבל המקסימום.

$$\max_{x \in I_n} \leq \frac{1}{2} \max_{x \in I_n} |\bar{y} - y|$$

לכן $\bar{y} - y \equiv 0$ עבור $x \in I_n$. נפעיל את אותה ההוכחה עבור המד"ר עם תנאי ההתחלה

$$y(x_0 + \frac{1}{2L}) = H$$

$$\bar{y}(x_0 + \frac{1}{2L}) = H$$

נמשיך עד שנכסה את כל הקטע.

□

המשפט של פיקארד הוא נהדר אבל התנאים שהוא דורש די חזקים. נראה משפט עם תנאים חלשים יותר, שכמובן יתן תוצאה חלשה יותר.

משפט הקיום של פיאנו

משפט. נתון המד"ר

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה במלבן:

$$|x - x_0| < a$$

$$|y - y_0| < b$$

ואם $|f(x, y)| \leq M$ שם, אזי קיים לפחות פתרון אחד למד"ר הנ"ל המוגדר בקטע

$$|x - x_0| \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

דרשנו פחות ממשפט פיקרד - לא דרשנו f תהיה ליפשיץ (כלומר f_y רציפה). אבל התוצאה יותר חלשה - יש קיום אבל לא בהכרח יחידות.

הוכחה. בה"כ $x_0 = 0$ נשתמש בהצגה האיטגרלית.

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s)) ds$$

נסמן $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ נוכיח עבור

$$0 \leq x \leq \alpha$$

נגדיר בקטע $[0, \alpha]$ את סדרת הפונקציות:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0, & 0 \leq x \leq \alpha \\ y_0 + \int_0^{x-\frac{\alpha}{n}} f(s, y_n(s)) ds, & \frac{\alpha}{n} \leq x \leq \alpha \end{cases}$$

איטרציית טונלי. להבדיל מפיקרד כל פונקציה תלויה רק בעצמה.

כמו באיטרציות פיקרד צריך להוכיח שהפונקציות y_n מוגדרות ורציפות במלבן $0 \leq x \leq \alpha$ $|y - y_0| \leq b$ (בתרגיל בית). כמו כן,

$$|y^n(x)| \leq |y_0| + \int_0^{x-\frac{\alpha}{n}} M \leq |y_0| + \alpha M$$

לכן הפונקציה $y_n(x)$ חסומות יוניפורמית. נראה תכונה חזקה (הרבה יותר ממה שאנחנו צריכים).

טענה. הפונקציות $y_n(x)$ הן רציפות במידה אחידה בקטע $[0, \alpha]$.

הגדרה. סדרה $\{y_n(x)\}$ היא רציפה במידה אחידה בקטע I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ שלכל n ולכל $x_1, x_2 \in I$ כך ש- $|x_2 - x_1| < \delta$ גורר $|y_n(x_2) - y_n(x_1)| < \varepsilon$

הוכחה. אם $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{\alpha}{n}$:

$$y_n(x_2) - y_n(x_1) = y_0 - y_0 = 0$$

אם $\frac{\alpha}{n} \leq x_1 < x_2 \leq \alpha$:

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq \int_{x_1 - \frac{\alpha}{n}}^{x_2 - \frac{\alpha}{n}} |(t, y_n(t))| dt \leq M|x_2 - x_1|$$

אם $0 \leq x_1 \leq \frac{\alpha}{n} \leq x_2 \leq \alpha$:

$$y_n(x_2) - y_n(x_1) = \int_0^{x_2 - \frac{\alpha}{n}} f(t, y_n(t)) dt$$

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq M|x_2 - \frac{\alpha}{n}| \leq M|x_2 - x_1|$$

□

לכן בכל שלושת המקרים מתקיים.

משפט. (ארצלה - אסקולי)

תהי $\{y_n(x)\}$ סדרת פונקציות שהיא חסומה וניפורמיט במידה אחידה בקטע, אזי קיימת תת סדרה $\{y_{n_j}(x)\}$ שמתכנסת במידה אחידה לקטע.

ללא הוכחה.

מכיוון שהוכחנו ש- $y_n(x)$ הן חסומות ורציפות במידה אחידה אזי קיימת תת-סדרה $\{y_{n_j}(x)\}$ שמתכנסת במ"ש לפונקציה $y_\infty(x)$. מכיוון ש y_{n_j} רציפות וההתכנסות היא במ"ש אז גם $y_\infty(x)$ רציפה.

נוכיח ש $y_\infty(x)$ מקיימת משוואה אינטגרלית ומכך נובע שהיא פתרון ולכן בפרט קיים פתרון. לכל $0 \leq x \leq \alpha$ עבור n_j מספיק גדול

$$y_{n_j}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n_j}(t)) dt - \int_{x - \frac{\alpha}{n}}^x f(t, y_{n_j}(t)) dt$$

שואף ל-

$$y_\infty(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_\infty(t)) dt - 0$$

□

דוגמאות. יחידות וחוסר יחידות

1.

$$y' = y^{1/3}$$
$$y(1) = 3$$

כאן $f(x, y) = y^{1/3}$ רציפה לכל x, y
 $f_y(x, y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ רציפה עבור $y \neq 0$.
לכן על סמך משפט פיקרד קיים פתרון יחיד סביב $(x_0, y_0) = (0, 3)$
נחשב:

$$\frac{y'}{y^{1/3}} = 1$$

או

$$y \equiv 0$$

הפתרון הסינגולרילא מקיים תנאי התחלה.

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x + c$$

$$\frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} = 1 + c$$

$$c = \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} - 1$$

$$y^{2/3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} - 1 \right)$$

$$y^2 = \left(\frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} - 1 \right) \right)^3$$

$$y = \pm \left(\frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} - 1 \right) \right)^{3/2}$$

הפתרון עם המינוס נופל.

$$y = \frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} - 1 \right)^{3/2}$$

האם זה פתרון גלובלי?

לא. פתרון לא קיים עבור $x < 1 - \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3}$ (שורש של שלילי).

2.

$$\begin{aligned}y' &= y^{1/3} \\ y(1) &= 0\end{aligned}$$

לא נוכל להפעיל פיקרד. כי $f_y = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ לא ליפשיץ בכל סביבה של

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

נפעיל פיאנו, כי $f(x, y)$ רציפה.

שתי אפשרויות כמו קודם:

$y \equiv 0$ מקיים תנאי התחלה לכן פתרון.

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x + c$$

$$\frac{3}{2}0^{2/3} = 1 + c$$

$$c = -1$$

$$y = \pm \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}$$

שני הפתרונות מקיימים תנאי התחלה. אבל הפתרונות לא ממשיים עבור $x < 1$. נתקן. לכן, דרך $(1, 0)$ עוברים 3 פתרונות שונים.

$$y_1(x) \equiv 0$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

אין בעיה ב $x = 1$ כי הנגזרת y' רציפה שם (שווה ל-0) גזירה ברציפות בכל התחום ופותרת את המד"ר.

נשים לב: לכל $a > 1$

$$y_{2,3}^a(x) = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{3}(x-a)\right)^{3/2}, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases}$$

לכל $a > 1$ גם פתרון של המד"ר. לכן יש אינסוף פתרונות.

מסקנה. דרישה של f_y רציפה מאוד חשובה ליחידות.

קיום ואי קיום גלובלי

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

אנו מתעניינים האם קיים פתרון גלובלי (לכל $x \in [\infty, \infty]$). אם לא, מהו התחום המקסימלי בו הפתרון קיים וכיצד הוא נשבר?

משפט. אם לכל $x, y \in \mathbb{R}^2$ הפונקציה $f(x, y)$ רציפה, חסומה $|f(x, y)| \leq M$ אזי לבעיה קיים פתרון גלובלי. אם בנוסף f_y רציפה ב- $\mathbb{R}$ הפתרון הגלובלי הוא יחיד.

הוכחה. ממשפט הקיום של פיאנו נובע שאם f רציפה במלבן

$$\begin{aligned}x - x_0 &\leq a \\ y - y_0 &\leq b\end{aligned}$$

אזי קיים פתרון בקטע $x - x_0 \leq \alpha$ כאשר $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$. בגלל ש f רציפה ב- $\mathbb{R}^2$ אפשר לבחור a, b גדולים כרצוננו, לכן α גדול כרצוננו לכן לכל x קיים פתרון. כלומר קיים פתרון גלובלי. אם נתון בנוסף f_y רציפה אזי היחידות נובעת באופן דומה מפיקד. נשים לב שהסתמכנו ש- f חסומה בכל $\mathbb{R}^2$ אבל f_y לא צריכה להיות חסומה ב- $\mathbb{R}^2$ (כי L לא משפיע על α).

□

דוגמא.

$$f = \sin y^2$$

$$f_y = 2y \cos y^2$$

קיים פתרון גלובלי יחיד. f חסומה על ידי 1 ואין בעיה ש f_y לא חסומה. מה קורה אם $f(x, y)$ לא חסומה בכל $\mathbb{R}^2$?

דוגמאות. 1.

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

$y = e^x$ לא חסומה אבל כן קיים פתרון גלובלי.

2.

$$\begin{aligned}y' &= y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

הפתרון $\frac{1}{1-x}$ לא חסומה ואין פתרון גלובלי.
 נחלק לקטעים ונפעיל על כל קטע פיקרד. המקרה בו אי אפשר לקבל פתרון גלובלי
 ע"י האיחוד של פתרונות לוקליים הוא כאשר $\alpha_i \rightarrow 0$ מספיק מהר.
 תהי $\{\alpha_i\}$ סדרת אורכי הקטעים.

$$\alpha_i = \min\{a_i, \frac{b_i}{M_i}\} = \frac{b_i}{M_i}$$

a_i, b_i מלבן סביב M_i, x_i, y_i המקסימום של f במלבן.
 נחפש b_i שייתן α_i מקסימלי.

$$M_i = M_i(b_i) = \max_{|b-y_i| \leq b_i} f = \max_{|b-y_i| \leq b_i} |y^2| = |y_i + b_i|^2$$

לכן,

$$\alpha_i = \max \frac{b_i}{M_i} = \max \frac{b_i}{|y_i + b_i|^2} = \frac{1}{4y_i}$$

מקסימום עבור $b_i = y_i$.

לכן כאשר $y \rightarrow \infty$ אכן $\alpha_i \rightarrow 0$

למה זה לא קורה עבור $y' = y$?

$$M_i = \max_{|y-y_i| \leq b_i} |y| = y_i + b_i$$

$$\alpha_i = \max_{b_i} \frac{b_i}{M_i} = \max_{b_i} \frac{b_i}{b_i + y_i} \geq \frac{1}{2}$$

מה קורה בנקודה שבה פתרון מד"ר מפסיק להתקיים?
 אפשרות 1:

$$y' = y^2$$

$$y(0) = 1$$

$$y = \frac{1}{1-x}$$

$$x^* = 1$$

$$\lim x \rightarrow x^* y(x) = \infty$$

הפתרון לא חסום.

אפשרות 2:

$$y' = \frac{1}{2y}$$

$$y(0) = 1$$

$$2yy' = 1$$

$$(y^2)' = 1$$

$$y^2 = x + c$$

$$y = \sqrt{x+1}$$

נשבר ב- $x^* = -1$. הפתרון לא מתפוצץ אלא שהפתרון יוצא מתחום הרציפות של $D = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$ שהוא $f(x, y) = 1/2y$. האם יש עוד אפשרויות? לא.

משפט: תהי $f(x, y)$ פונקציה גזירה ברציפות בתחום הפתוח $D \subseteq \mathbb{R}^2$. אזי לכל $(x_0, y_0) \in D$ למד"ר $y' = f(x, y)$ קיים פתרון יחיד המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$. יהי $[x_0, x^*)$ הקטע המקסימלי בו פתרון זה קיים. אם $x^* < \infty$ אז כאשר $x \rightarrow x^*$ או $x, y(x)$ שואף לשפת התחום D או שהפונקציה אינה חסומה. הוכחה: נניח $x^* < \infty$ אם $y(x)$ אינה חסומה כאשר $x \rightarrow x^*$ אז סיימנו. נניח $y(x)$ חסומה. צ"ל $(x, y(x))$ שואף לשפת D . ניקח סדרה $x_n \nearrow x^*$ מכיוון שהסדרה $(x_n, y(x_n))$ חסומה אז לפי בולצנו-וירשטראס קיימת לה תת-סדרה המתכנסת לנקודות הצטברות (x^*, y^*) נוכיח x^*, y^* נמצא על שפת D . נניח שלא. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-

$$R = \{(x, y) : |x - x^*| \leq \varepsilon, |y - y^*| \leq \varepsilon\} \subseteq D$$

יהי $M = \max_R |f|$ מכיון ש- f רציפה ו R קומפקטית אז $M < \infty$ נבחר $\delta < \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2M}\}$ ונגדיר

$$G = \{(x, y) : |x - x^*| \leq \delta, |y - y^*| \leq \varepsilon\} \subseteq D$$

פתוחה וחלקית ל- $\mathbb{R}^2$ נבחר n כך ש- $(x_n, y_n) \in G$ $y(x_n) = y_n$ $y' = f(x, y)$ נפעיל משפט קיום ויחידות ב- G נובע קיים פתרון יחיד לפחות בקטע

$$|x - x_n| \leq \alpha = \min \delta \frac{\varepsilon}{M} = \delta$$

$$|x^* - x_n| < \delta$$

לכן פתרון המדר קיים עד ואחרי x^* כלומר הפתרון המקסימלי קיים אחרי x^* סתירה.