



### מד"ר 1 - הרצאה 3

Save a tree - don't write madar

31.10.10

**1 משוואה מהצורה**  $y'(x) = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+h}\right)$

מקרה ראשון: הישרים נחתכים כלומר כאשר:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$

טענה. קיימת החלפת משתנים:

$$u = x - x_0$$

$$v = y - y_0$$

המעבירה את המשוואה הנתונה אל:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{du + ev}\right)$$

וזו משוואה הומוגנית שאנחנו יודעים לפתור.

הוכחה. אם נקודת החיתוך היא  $(x_0, y_0)$  נזיז את הצירים שהראשית תהיה בנקודת החיתוך: לכל  $(x_0, y_0)$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + h} = \frac{a(u + x_0) + b(v + y_0) + c}{d(u + x_0) + e(v + y_0) + h}$$

רוצים שיתקיים:

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + h} = \frac{au + bv}{du + ev}$$

לכן, נדרוש:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$dx_0 + ey_0 + h = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ h \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

לכן קיים  $x_0, y_0$  (ויחיד) שפותר. ניתן לכתוב במפורש ע"י כלל קרמר

$$x_0 = \frac{ce - bh}{ae - bd}$$

$$y_0 = \frac{ah - cd}{ae - bd}$$

**מקרה שני: הישרים מקבילים**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

לכו קיים  $\lambda$  כך ש-  $(d, e) = \lambda(a, b)$

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + h}\right)$$

נציב  $z = ax + by$

$$y' = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + h}\right) := g(z)$$

בנוסף

$$z'(x) = a + by' = a + b \cdot g(z)$$

$$z'(x) = a + b \cdot g(z)$$

זה אומר שאפשר להפתור בהפרדת משתנים:

$$\frac{z'}{a + bg(z)} = 1$$

וניקח אינטגרל משני האגפים.  
אחרי שנמצא את  $z(x)$  נקבל

$$y(x) = \frac{z(x) - ax}{b}$$

□

**פתרון מד"ר ע"י ההצבה  $x = x(y)$**

**דוגמא.**

$$y' = \frac{1}{2x - y}$$

למשל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - y}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2x - y$$

וזה מד"ר לינארי עבור  $x = x(y)$ .

מקרה מעניין נוסף הוא משוואה מהצורה:

$$x = f(y')$$

נסמן:

$$y'(x) = p(x)$$

ואז

$$y = \int \frac{dy}{dx} \cdot dx + c = \int p \frac{dx}{dp} \cdot dp + c$$

מכיוון ש-  $x = f(p)$

$$\frac{dx}{dp} = f'(p)$$

לכן קיבלנו את הפתרון

$$x(p) = f(p)$$

$$y(p) = \int p f'(p) dp + c$$

זה לא נראה כמו הפתרון הרגיל שלנו. ואכן, זה פתרון בצורה פרמטרית. החמצנו את הפתרונות הסינגולרים מהסגנון  $x \equiv c$  ואז  $y' = \infty$  ואז אסור לעשות החלפת משתנה. הנחנו בצורה מובלעת שיש נגזרת. פתרון סינגולרי:

$$x \equiv c$$

$$y' = \infty$$

קונסיסטנטי רק עבור  $x \equiv f(p = \infty)$

**דוגמא:**

$$x^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2$$

$$x = \pm \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

בסגנון שראינו  $x$  פונקציה של  $y'$ .  
אז

$$x(p) = \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = f(p)$$

$$y(p) = \pm \int p f'(p) dp + c$$

נותר לבדוק שמקבלים:

$$y(p) = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + c$$

וזה פתרון פרמטרי.  
הפירוש הגיאומטרי –

$$x^2 + (y - c)^2 = \frac{a^2 p^2}{1 + p^2} + \frac{a^2}{1 + p^2} = a^2$$

מעגלים על ציר  $y$  שרדיוסם  $a$ .  
מאיפה ידענו דווקא להציב במעגל? ניוטון המציא הכל ואנחנו סתם חוזרים אחריו.  
פתרונות סינגולריים:

$$x = f(p = \infty)$$

$$x = \pm a$$

כי

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \pm \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} = \pm a$$

שני משיקים אנכיים משותפים. בדיוק המעטפת. התופעה שהפתרונות הסינגולריים הם המעטפת של הפתרונות הכללים היא די שכיחה.

$$y' = p \quad y = g(y')$$

$$x = \int \frac{dx}{dy} dy + c = \int \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dp} dp$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}$$

אך ורק בתנאי  $p \neq 0$ .  
לכן שוב קיבלנו פתרון בצורה פרמטרית:

$$x(p) = \int \frac{1}{p} g(p) dp + c$$

$$y(p) = g(p)$$

פתרון סינגולרי:

$$\begin{aligned}p &= 0 \\ \Rightarrow y &\equiv c \\ \Rightarrow 0y &\equiv g(p=0)\end{aligned}$$

נחזור לתיאוריה.

## רציפות ויחידות

נתבונן ב-

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

ונשאל את עצמנו כמה שאלות:

- האם  $y(x, y_0)$  משתנה בצורה רציפה ב- $y_0$ ?
  - האם ייתכן שקיים יותר מפתרון אחד (חיים חו יחידות)?
- הגדרה.** פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  אם קיים קבוע  $L \geq 0$ , כך שלכל זוג נקודות  $(x, y_1), (x, y_2) \in D$  מתקיים:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

נשים לב:

- אותו  $x$ .
  - $L$  אינו תלוי ב- $x, y$ .
  - $y$  בלתי תלוי ב- $x$ .
- למה.** תהי  $f(x, y)$  גזירה ברציפות בתחום חסום סגור וקמור  $D$ . אזי  $f$  מקיימת תנאי ליפשיץ ב- $D$  עם

$$L = \sup \left| \frac{df}{dy} \right|$$

הוכחה.

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) = (y_2 - y_1) \frac{df}{dx}(x, \theta)$$

לפי משפט ערך הביניים של לגרנז' עבור  $y_1 < \theta < y_2$  לכן

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| = |(y_2 - y_1)| \sup \left| \frac{df}{dx} \right|$$

□

**למה.** תהי  $\sigma(x)$  פונקציה גזירה המקיימת את אי־השוויון הדיפרנציאלי

$$(*) \quad \sigma'(x) \leq k\sigma(x)$$

החל ממקום מסוים, כלומר עבור  $x_0 \leq x$  כאשר  $K$  הוא קבוע. אזי

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_0) \cdot e^{k(x-x_0)}$$

$$x_0 \leq x \text{ לכל}$$

הוכחה. מ- $(*)$  נסיק

$$\sigma'(x) - k\sigma(x) \leq 0$$

$$e^{-kx}(\sigma' - k\sigma) \leq 0$$

$$(e^{-ky}\sigma)' \leq 0$$

נפעיל אינטגרל על שתי הצדדים עם גבולות  $x_0, x$ :

$$\int_{x_0}^x (e^{-ky}\sigma)' \leq 0$$

$$(e^{-ky}\sigma)|_{x_0}^x \leq 0$$

$$e^{-kx}\sigma(x) - e^{-kx_0}\sigma(x_0) \leq 0$$

□

**משפט. (משפט רציפות תנאי התחלה)**

יהיו  $y_1(x)$  ו- $y_2$  שני פתרונות של המד"ר

$$y' = f(x, y)$$

עם תנאי ההתחלה  $y_2(x_0) = y_{0,2}$  ו- $y_1(x_0) = y_{0,1}$ ,  $f$  מקיימת את תנאי ליפשיץ עם קבוע  $L$  אזי:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L(x-x_0)} \cdot |y_{0,2} - y_{0,1}|$$

הוכחה. נוכיח תחילה עבור  $x_0 > x$ . נגדיר

$$\sigma(x) = (y_2(x) - y_1(x))^2$$

אז

$$\sigma' = 2(y_2 - y_1)(y_2' - y_1') = 2(y_2 - y_1) \cdot (f(x, y_2) - f(x, y_1))$$

נניח לרגע  $y_2 > y_1$ . אז

$$\sigma' \leq 2(y_2 - y_1) \cdot |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 2(y_2 - y_1) \cdot L \cdot |y_2 - y_1| = 2L \cdot |y_2 - y_1|^2$$

באותו אופן עבור  $y_2 < y_1$  נקבל

$$\sigma' \leq 2L \cdot |y_2 - y_1|^2$$

כלומר תמיד

$$\sigma' \leq 2L\sigma$$

על סמך למה קודמת

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_0) \cdot e^{2L|x-x_0|}$$

עבור  $x \leq x_0$ .

נוציא שורש:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |y_{0,2} - y_{0,1}| e^{L|x-x_0|}$$

מה קורה עם  $x < x_0$ . אפשר לעבוד קשה ולעשות הכל מההתחלה. אבל לא צריך. נחליף  $x = s = -x$  כעת:  $y'(x) = f(x, y)$  יהפוך ל-

$$y'(s) = -f(-s, y)$$

נפעיל את מה שהוכחנו על מה שקיבלנו. רק נבדוק שלא קלקלנו תנאי משפט: ולא קילקלנו כי אם  $f$  מקיימת תנאי ליפשיץ אז גם  $-f$ . המשפט מראה שהפתרון רציף בנתאי ההתחלה, כלומר, לכל  $x$  אם  $y_{0,1} \rightarrow y_{0,2}$  אזי  $y_1(x) \rightarrow y_2(x)$ . באופן לא פורמלי שינויים קטנים בתנאי ההתחלה גורים לשינויים קלים בפתרון. אבל הקבוע הכפלי גודל אקספוננציאלית ב- $x$ .  $\square$

### מסקנה. (יחידות)

נתונה בעיית תנאי התחלה  $y' = f(x, y)y(x_0) = y_0$  אם  $f$  מקיימת תנאי ליפשיץ, אזי קיים (לכל היותר) פתרון אחד.

הוכחה. נניח קיימים שני פתרונות שונים  $y_1, y_2$ . אז על סמך משפט קודם

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)|$$

$\square$

כלומר,

רציפות בתנאי התחלה  $\Leftarrow$  יחידות.

$f$  מקיימת תנאי ליפשיץ  $\Leftarrow$  יחידות

רציפות  $f_y \left( = \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Leftarrow$  יחידות

בפועל כאשר תנאי התחלה קרוב לתנאי ההתחלה נקבל פתרון למד"ר שקרובה לפונקציה האמיתית. בשביל לדעת את זה:

**משפט. (משפט רציפות יותר חזק)**

יהיו  $y_1(x)$  ו-  $y_2(x)$  פתרונות של המד"רים  $\frac{dy}{dx} = f_1(x, y_1)$  ו-  $\frac{dy}{dx} = f_2(x, y_2)$  בהתאמה, בקטע  $a \leq x \leq b$ .  
נניח שלכל  $a \leq x \leq b$  ולכל  $y$

$$|f_2(x, y_2) - f_1(x, y_1)| \leq \varepsilon$$

נניח ש-  $f_1$  או  $f_2$  מקיימות תנאי ליפשיץ עם קבוע  $L$ . אזי

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |y_2(a) - y_1(a)| \cdot e^{L|x-a|} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|x-a|} - 1)$$

לא נוכיח את המשפט (וטוב שכך). ההוכחה מאוד דומה למה שעשינו.

## משפטי קיום ויחידות

### הצגה אינטגרלית

נתונה בעיית תנאי ההתחלה

$$(1) \quad y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0$$

נניח

1.  $f$  רציפה כפונקציה של  $x, y$ .

2.  $y(x)$  רציפה.

לכן  $f(x, y(x))$  הרכבת פונקציות רציפות, ולכן גם רציפה, בפרט אינטגרלית. לכן

$$\int_{x_0}^x y'(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{x_0}^x f(\tilde{x}, y(\tilde{x})) d\tilde{x}$$

$$(2) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(\tilde{x}, y(\tilde{x})) d\tilde{x}$$

הוכחנו  $y(x)$  פתרון של המד"ר (1) אזי הוא גם פתרון של המשוואה האינטגרלית (2).

**מסקנה.** אם  $f(x, y)$  רציפה  $y(x)$  רציפה אז  $y(x)$  פתרון של המד"ר (1) אם הוא פתרון של המשוואה האינטגרלית (2).

בהרבה מקרים הרבה יותר נוח לעבוד עם אינטגרלים מאשר עם גזירה. מדוע?  
אחת הסיבות היא שאינטרל אופרטור חסום. כלומר:

$$|f| \leq M \Rightarrow \int_a^b |f| \leq (b-a)M$$

ומצד שני הנגזרת היא לא

$$|f| \leq M \not\Rightarrow |f'| < M$$

### שיטת האינטגרציה של פיקרד

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

ובאופן כללי

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

רעיון: אם  $y_n(x) \rightarrow y(x)$  מתכנס לפונקציה. בהנחה שהכל בסדר

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

לכן  $y(x)$  פתרון של (2) ולכן גם של (1) קיבלנו שקיים פתרון.

**דוגמא.**  $y(0) = 1$   $y' = 2xy (= f(x, y))$  נוח לפתור בהפרדת משתנים. (בדקו). מקבלים  $y(x) = e^{x^2}$  נפעיל איטרציית פיקרד

$$y_0(x) \equiv 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_{x_0=0}^x 2t \cdot 1 = y_0 dt = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2t(1+t^2) = 1 + x^2 + x^4/2$$

$$y_3(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

באינדוקציה

$$y_n(x) = 1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

אלו הסכומים החלקיים של טור טיילור של  $e^{x^2}$  לכן  $y_n(x) \rightarrow y(x)$  מן הסתם זה לא תמיד יצא טור טיילור.

**משפט. (משפט קיום ויחידות למד"ר מסדר 1)**

נתון

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

ניח  $f(x, y)$  מוגדרת ורציפה במלבן ומתקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע  $L$ . נסמן

$$M = \max_R |f(x, y)|$$

$$\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

אזי בקטע  $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  קיים למד  $y' = f(x, y)$  פתרון אחד ויחיד המקיים את תנאי ההתחלה  $y(x_0) = y_0$  הערות:

$M < \infty$  כי רציפה ו- $R$  סגור וחסום.

משפט מבטיח קיום לוקלי.

$\alpha$  תלוי ב- $M, b, a$  ואינו תלוי ב- $L$ .

הוכחה. נוכיח עבור  $x_0 < x$  עבור  $x_0 > x$  ההוכחה תנבע בעזרת הטרינספורמציה  $x \rightarrow -x$  נפעיל איטרציית פיקרד

נוכיח תחילה שלכל  $n$   $y_n(x)$  מוגדרת, רציפה ו- $|y_n(x) - y_0| < b$ .

נוכיח באינדוקציה. בסיס:

$$y_0(x) \equiv y_0$$

מעבר:

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right|$$

מהנחת האינדוקציה  $y_n(x)$  מוגדרת, רציפה ו- $|y_n(x) - y_0| < b$ . לכן גם  $f(x, y_n(x))$  מוגדרת רציפה וחסומה כנ"ל.

לכן גם  $y_{n+1}(x)$  רציפה ומוגדרת. נותר להראות חסימות

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq L$$

□