

מד"ר 1 - הרצאה 13

Save a tree - don't write madar

16.1.11

$$\underline{x}(t) = Ax$$

מקרה ראשון: $A^* = A$
 n ערכים עצמיים r_i ממשיים, n וקטורים עצמיים ξ_i .

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi^i e^{r_i t}$$

מקרה שני:
 A אינה הרמיטית אבל יש לה n ערכים עצמיים ממשיים ו- n וקטורים עצמיים ב"ת.
 הפתרון כמו קודם.
 מקרה שלישי:
 A ממשיית לא הרמיטית, בעל n ערכים עצמיים שונים חלקם מרוכבים. צורת הפתרון עדיין
 נשארת. לעיתים במקרה זה נרצה לקבל צורה אחרת של פתרון.
 תזכורת: אם A ממשיית עם ע"ע r_1 מרוכב עם ו"ע ξ^1 אזי $r_2 = \bar{r}_1$ הוא גם ע"ע של A והו"ע

$$\xi^r = \bar{\xi}^1$$

הוכחה.

$$A\xi^1 = r_1\xi^1$$

$$A\bar{\xi}^1 = r_1\bar{\xi}^1$$

$$A\xi^{\bar{1}} = \bar{r}_1\xi^{\bar{1}}$$

□

לכן שני פתרונות ב"ת המתאימים ל- r_1, r_2 הם

$$\underline{x}^1 = \underline{\xi}^1 e^{r_1 t}$$

$$\underline{x}^2 = \underline{\xi}^2 e^{r_2 t} = \bar{\xi}^1 e^{\bar{r}_1 t}$$

לכן,

$$\tilde{x}^1 = \Re(x^1) = \frac{x^1 + x^2}{2}$$

$$\tilde{x}^2 = \Im(x^1) = \frac{x^1 - x^2}{2}$$

הם שני פתרונות ב"ת של $\dot{x} = Ax$ הפורשים אותו תת־מרחב כמו $\{x^1, x^2\}$.
 "המחיר" - פתרונות ממשיים אלו כבר לא מהצורה ξe^{rt}
 כי, אם $r_1 = \lambda + i\mu$

$$\underline{\xi}^1 = \underline{a} + i\underline{b}$$

$$\begin{aligned} x^1 &= (\underline{a} + i\underline{b})e^{r_1 t} = (\underline{a} + i\underline{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) = \\ &= e^{\lambda t} \underbrace{[\underline{a} \cos \mu t - \underline{b} \sin \mu t]}_{\tilde{x}^1} + i e^{\lambda t} \underbrace{[\underline{a} \sin \mu t + \underline{b} \cos \mu t]}_{\tilde{x}^2} \end{aligned}$$

דוגמא. פתור

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underline{x}$$

A ממשיית אבל לא הרמיטית. נחשב ע"ע:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 3-r & 2 \\ -1 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t}$$

מכיוון ש- A ממשית

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2-i)t}$$

אם רוצים את שני הפתרונות הב"ת הממשיים:

$$\tilde{x}^1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}^2 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ +\cos t \end{pmatrix}$$

לא טילפנו במקרה שבו אין n ו"ע ב"ת. נטפל בזה אחר כך.

פתרון מערכת הומוגנית לינארית בעזרת לכסון

נניח D מטריצה קבועה אלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix}$$

נתבונן במד"ר

$$(*)_D \quad \dot{x}(t) = Dx$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = r_n x_n \end{cases}$$

מערכת המשוואות אינה מצומצמת. כל משוואה לא תלויה באחרות. מערכת משוואות n משוואות סקלרים קלות לפתרון.

הפתרון:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{r_1 t} \\ \vdots \\ x_n(t) = c_n e^{r_n t} \end{cases}$$

או בכתיב וקטורי:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + \dots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{r_n t}$$

נניח עכשיו

$$\dot{\underline{x}} = Ax$$

ל- A יש n וקטורים עצמיים ב"ת

$$Au^i = r_i u^i$$

נגדיר את מטריצת המעבר:

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ u^1 & \dots & u^n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן,

$$AT = \begin{pmatrix} | & & | \\ Au^1 & \dots & Au^n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ r_1 u^1 & \dots & r_n u^n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ u^1 & \dots & u^n \\ | & & | \end{pmatrix} D$$

לכן

$$AT = TD$$

T הפיכה כי יש n ו"ע ב"ת.

$$T^{-1}AT = D$$

אומרים במקרה זה כי A דומה ל- D . יש להם אותם ע"ע. אנו רוצים לפתור

$$\dot{\underline{x}} = Ax$$

$$\dot{\underline{x}} = TDT^{-1}\underline{x}$$

$$T^{-1}\dot{\underline{x}} = DT^{-1}\underline{x}$$

נסמן

$$\underline{y}(t) = T^{-1} \underline{x}(t)$$

$$\dot{\underline{y}}(t) = T^{-1} \dot{\underline{x}}(t)$$

$$\dot{\underline{y}}(t) = D \underline{y}$$

וראינו שהפתרון:

$$y^{(j)} = e^{r_1 t} \begin{pmatrix} | \\ e^j \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^j(t) = T \underline{y}^{(j)}(t) = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} | \\ u^j \\ | \end{pmatrix}$$

וזה כבר ראינו. הבעיה של פתרון $\dot{x} = Ax$ שקולה לבעיה של לכסון המטריצה A . כלומר מציאת מטריצה T כך ש- $T^{-1}AT = D$.

אם A לכסינה קיימים n ו"ע ב"ת ולכן קיימים n פתרונות ב"ת מהצורה $\underline{x}^{(i)} = \underline{u}^{(i)} e^{r_i t}$ מה אם A לא לכסינה?

כלומר אין n וקטורים עצמיים ב"ת, הריבוי האלגברי גדול ממש מהריבוי הגיאומטרי. נתחיל ממקרה של מטריצה $A_{2 \times 2}$ לא לכסינה. ל- A יש ערך עצמי כפול r עם ו"ע יחיד $\underline{u}^1$. ריבוי אלגברי 2, ריבוי גיאומטרי 1. אז $(A - r)u^1 = 0$ ואין וקטור עצמי נוסף ב"ת. במקרה זה קיים ו"ע מוכלל u^n כך ש- $(A - r)u^2 = u^1$

$$(A - r)^2 u^2 = (A - r)u^1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ u^1 & u^2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ Au^1 & Au^2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ ru^1 & ru^2 + u^1 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u^1 & u^2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

אז $T = \begin{pmatrix} | & | \\ u^1 & u^2 \\ | & | \end{pmatrix}$, ולכן,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$(*)A = T \underbrace{\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\text{בלוק זיורדן}} T^{-1}$$

נתבונן עכשיו במד"ר $\dot{x} = Ax$. נפעיל T^{-1} . עפ"י $(*)$:

$$T^{-1}\dot{x} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} T^{-1}x$$

לכן, אם נגדיר

$$y = T^{-1}x$$

אזי

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} y$$

נקבל,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = ry_1 + y_2 \\ \dot{y}_2(t) = ry_2 \end{cases}$$

$$y_2(t) = c_1 e^{rt}$$

$$\dot{y}_1(t) - ry_1 = c_1 e^{rt}$$

$$y_1(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 (y^{(1)}(t)) + c_2 (y^{(2)}(t))$$

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t e^{rt} \\ e^{rt} \end{pmatrix} = e^{rt} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נחזור למערכת מקורית:

$$x^{(1)} = T y^{(1)} = \begin{pmatrix} | & | \\ u^1 & u^2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{rt} = u^1 t e^{rt} + u^2 e^{rt}$$

$$x^{(2)} = Ty^{(2)} = \begin{pmatrix} | & | \\ u^1 & u^2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{rt} = u^1 e^{rt}$$

באופן דומה אם ל- A יש ע"ע λ עם ריבוי אלגברי 3 וריבוי גיאומטרי 1 אז:

$$(A - r) \underbrace{u^1}_{\text{ו"ע}} = 0$$

$$(A - r) \underbrace{u^2}_{\text{ו"ע מובלל}} = u^1$$

$$(A - r) \underbrace{u^3}_{\text{ו"ע מובלל}} = u^1$$

לכן, אם נגדיר את מטריצת המעבר:

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

נקבל,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} r & 1 & \\ & r & 1 \\ & & r \end{pmatrix}$$

אז יהי לנו

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ry_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = ry_2 + y_3 \\ \dot{y}_3 = ry_3 \end{cases}$$

פותרים ומקבלים:

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{rt}$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{rt}$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{rt}$$

לכן,

$$x^{(1)} = Ty^{(1)} = u^{(1)}e^{rt}$$

$$x^{(2)} = Ty^{(2)} = u^{(1)}te^{rt} + e^{(2)}e^{rt}$$

$$x^{(3)} = Ty^{(3)} = u^{(1)}t^2/2e^{rt} + u^{(2)}te^{rt} + e^{(3)}e^{rt}$$

הכללה עבור ריבוי אלגברי k וריבוי גיאומטרי 1 כנ"ל
אבל לא בהכרח זה יהיה כך. באופן כללי $T^{-1}AT$ תהיה מטריצת בלוקים ולכל בלוק
מפעילים בדיוק את מה שראינו.

משפט. יהי r ע"ע של A עם ריבוי אלגברי k . אזי ל- r מתאימה משפחה k פרמטרית של
פתרונות של $\dot{x} = Ax$ מהצורה

$$\underline{x} = e^{rt} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

כאשר $p_1, \dots, p_n$ הם פולינומים ממעלה $k-1 \geq$.
מקדמי פולינומים אלו תלויים באופן לינארי ב- k פרמטרים $c_1, \dots, c_k$. אם נכתוב:

$$x(t) = c_1x^{(1)} + \dots + c_kx^{(k)}$$

אזי, $x_1, \dots, x_k$ הם k פרמטרים ב"ת של $\dot{x} = Ax$.

□

הוכחה. הוכחנו למעלה. אפילו הראינו את צורת הפתרונות.

דוגמא.

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

$$r_{1,2} = 2$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אין ו"ע שני.

דרך 1: חישוב הו"ע המוכלל u^r .

דרך 2: נחשב פתרון מהצורה

$$\underline{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}$$

נציב,

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t} [2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}]$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha t + 2\beta + \alpha \\ 2\gamma t + 2\delta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha t + 3\beta - \gamma t - \delta \\ \alpha t + \beta + \gamma t + \delta \end{pmatrix}$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{cases} 2\alpha = 3\alpha - \gamma \\ 2\beta + \alpha = 3\beta - \gamma \\ 2\gamma = \alpha + \gamma \\ 2\delta + \gamma = \beta + \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \alpha + \delta \\ \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma + \delta \end{cases}$$

שני פרמטרים ב"ת
למשל:

$$\begin{cases} \alpha = c_1 \\ \beta = c_2 \\ \gamma = c_1 \\ \delta = c_2 - c_1 \end{cases}$$

ולכן,

$$x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ c_1 t + c_2 - c_1 \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{[e^{2t} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\text{ו"ע}}} + c_2 \underbrace{[e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\text{ו"ע מוכלל}}} + c_2 \underbrace{e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ו"ע}}$$

נראה כי אכן זהו וקטור עצמי מוכלל.

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכת לא הומוגנית של מד"ר לא מסדר ראשון

$$\dot{\underline{x}} = \underline{p}(t)\underline{x} + \underline{g}(t)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

נניח שידועה מערכת יסודית $\{x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\}$ של הבעיה ההומוגנית $\dot{\underline{x}} = \underline{p}\underline{x}$. נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$\underline{x}_p(t) = c_1(t)x^{(1)}(t) + \dots + c_n(t)x^{(n)}(t)$$

כאשר $c_1(t), \dots, c_n(t)$ פונקציות סקלריות.

$$p(t)x_p + g(t) = \dot{\underline{x}}_p = c'_1(t)x^{(1)}(t) + \dots + c'_n(t)x^{(n)}(t) + c_1(t)\dot{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n(t)\dot{x}^{(n)}(t)$$

$\dot{x} = px$ פתרון של המשוואה ההומוגנית. לכן,

$$p[c_1(t)x^{(1)}(t) + \dots + c_n(t)x^{(n)}(t)] + g(t) = [c_1(t)\dot{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n(t)\dot{x}^{(n)}(t)] + g(t)$$

מכאן,

$$c'_1(t)x^{(1)}(t) + \dots + c'_n(t)x^{(n)}(t) = g(t)$$

n משוואות ב- n נעלמים שהם $c'_1, \dots, c'_n$.

$$\det(\text{מקדמים}) = \begin{vmatrix} x^{(1)} & \dots & x^{(n)} \\ | & & | \end{vmatrix} = w(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \neq 0$$

לכן קיים פתרון יחיד.

דוגמא.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

נסמן,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור משוואה הומוגנית:

$$\dot{x} = Ax$$

הפתרון הוא:

$$r_1 = 2 \quad u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 3 \quad u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_H = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\underline{x}_p = c_1(t)x^{(1)} + c_2(t)x^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון:

$$\begin{cases} c_1' = 2te^{-2t} \\ c_2' = te^{-3t} \end{cases}$$

באמצעות אינטגרציה בחלקים:

$$c_1(t) = -te^{-2t} - \frac{e^{-2t}}{2}$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{3} \left(-te^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{3} \right)$$

ולכן מצאנו פתרון $x_p(t)$.

שיטת המקדמים הלא ידועים

נראה בתרגול. בדיוק כמו עבור מד"ר מסדר n .

מד"ר מטריציאלי

$$(*)_V \dot{\underline{x}}(t) = p(t) \cdot \underline{x}$$

ראינו שקיימים n פתרונות ב"ת $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$

$$(*)_j \dot{x}^{(j)} = p(t)x^{(j)}$$

נסמן,

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ x^{(1)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

מטריצה יסודית של המד"ר.

טענה.

$$\dot{\underline{\psi}} = \underline{p}(t) \cdot \underline{\psi}$$

הוכחה. נסתכל על עמודה j של שני האגפים,

$$\dot{x}^{(j)} = px^{(j)}$$

נבחר את הוקטורים $x^{(j)}(t)$ כך ש- $x^{(j)}(t=0) = e^j$

לכן, $\psi(t=0) = I$.

לכן, $\psi(t)$ הוא הפתרון היחיד של $\dot{\psi} = p\psi$ שמקיים $\psi(0) = I$.
הראינו שזה הפתרון. יחידות נובעת ממשפט הקיום והיחידות.

□

נתבונן עכשיו בפתרון של $\dot{\underline{x}} = P\underline{x}$ עם תנאי ההתחלה

$$\underline{x}(0) = \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

לכן,

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^n x_j^0 x^{(j)}(t) = \psi \left(\begin{pmatrix} | \\ \underline{x}^0 \\ | \end{pmatrix} \right)$$

מסקנה. יהי $\{x^{(j)}(t)\}_{j=1}^n$ הפתרונות של $\dot{x} = Px$ המסייעים $x^{(j)}(0) = \varphi_j$ ויהי

$$\psi = \begin{pmatrix} | & & | \\ x^1 & \dots & x^n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

אז הפתרון של $\dot{x} = px$ המקיים $x(0) = \underline{x}^0$ נתון ע"י:

$$x(t) = \underline{\psi}(t)x^0$$

נדון במקרה: $p(t)$ מטריצה קבועה שנסמנה ע"י A .

$$\begin{cases} \dot{x} = \underline{A}x \\ \underline{x}(0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

ראינו במסקנה:

$$x(t) = \psi(t)\underline{x}^0$$

מה קורה במקרה הסקלרי?

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

לכן,

$$x(t) = e^{at} \cdot x^0$$

מדוע? ראשית ברור שמקיים את תנאי ההתחלה. מדוע אקספוננט?

$$e^{at} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!}$$

לכן,

$$(e^{at})' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m t^{m-1}}{(m-1)!} = a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m t^m}{m!} = a \cdot e^{at}$$

נכליל למד"ר וקטורי. נגדיר:

$$e^{At} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots$$

וכן,

$$(e^{At})' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!} \right)' \stackrel{(1)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m t^{m-1}}{(m-1)!} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m!}$$

1. תחת ההנחה שמותר לגזור איבר-איבר.

קיבלנו, $(e^{At})' = Ae^{At}$

מסקנה. המטריצה e^{At} היא פתרון של המד"ר המטריציוני $\dot{\psi}(t) = A\psi$ עם תנאי ההתחלה $\psi(0) = I$

אבל קודם הראינו

$$\psi = \begin{pmatrix} | & & | \\ x^{(1)} & \dots & x^{(n)} \\ | & & | \end{pmatrix} = e^{At}$$

אז קיבלנו את זה בשתי דרכים.

למה. עבור $r, s \in \mathbb{R}$:

$$e^{Ar} \cdot e^{As} = e^{A(r+s)}$$

לא נוכיח את זה.

אבל נסיק, כי עבור $r = -s$

$$e^{Ar} \cdot e^{-Ar} = I$$

ולכן,

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

כעת, מד"ר לא הומוגני:

$$\dot{x} = Ax + g$$

נחשב פתרון בעזרת e^{At} .
פתרון כללי של ההומוגנית:

$$x_H(t) = \underbrace{e^{At}}_{\psi} \cdot c$$

כאשר

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

נחשב ע"י וריאציית פרמטרים:

$$\underline{x}_p(t) = e^{tA} \cdot \underline{c}(t)$$

$$Ax_p + g = \frac{dx_p}{dt} = \underbrace{Ae^{tA} \cdot \underline{c}}_{x_p} + e^{tA} \cdot \underline{c}'$$

$$e^{tA} \cdot \underline{c}' = g$$

$$\underline{c}' = \underbrace{e^{-At}}_{\text{ההופכית של } e^{tA}} \cdot g$$

אזי,

$$\underline{c} = \int^t e^{-sA} g(s) ds$$

לכן הפתרון הפרטי:

$$\underline{x}_p(t) = e^{tA} \cdot c = e^{tA} \cdot \int^t e^{-sA} g(s) ds$$

והפתרון הכללי:

$$x(t) = x_H + x_p = e^{tA} \left[\underline{c} + \int^t e^{-sA} \cdot g(s) ds \right]$$