

מד"ר 1 - הרצאה 12

Save a tree - don't write madar

9.1.11

שיטת פרובוניוס

משוואת בסל:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, x > 0$$

$x_0 = 0$ נקודה סינגולרית רגולרית x

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\underbrace{a_0}_{\neq 0} (r^2 - \nu^2) = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \pm \nu$$

$$a_1(1 + 2r)^2 = 0$$

$$\Rightarrow r \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0$$

$$r = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \text{ שרירותי}$$

נוסחת הרקורסיה:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - \nu^2}$$

מקרה I: $\nu = 0$ $r_{1,2} = 0$
יש פתרון

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_1 = a_3 = \dots = 0$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}$$

$$y_1(x) = a_0 J_0(x)$$

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

מציאת הפתרון השני:

$$y_2(x) = (\ln x) y_1(x) + |x|^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

במקרה שלנו

$$y_2(x) = (\ln x) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

צריך לחשב $\{b_n\}$.

דרך I:

הצבת $y_2(x)$ במד"ר והשוואת מקדמים של x_n ו- $(\ln x)x^n$

דרך II:

$$b_n = \frac{d}{dr} a_n(r) \Big|_{r=r_1}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

מכיוון שצריך גם התלות ב- r של המקדמים נחשב אותם שוב.

$$a_1(r)(1+r)^2 \equiv 0$$

$$a_1'(x)(1+r)^2 + a(r) \cdot 2 \cdot (1+r) = 0$$

אחרי שגזרנו נציב $r = 0$.

$$a_1'(0) + \underbrace{a_1(0)}_{=0} (2 \cdot 1) = 0$$

לכן,

$$a'_1(0) = 0$$

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}$$

נגזור לפי r

$$2(n+r)a_n(r) + a'_n(r)(n+r)^2 = -a'_{n-2}(r)$$

נציב $r = 0$

$$2na_n(0) + a'_n(0)n^2 = -a'_{n-2}(0)$$

לכן,

$$a'_n(0) = -\frac{a'_{n-2}(0)}{n^2} - \frac{2a_n(0)}{n}$$

מכיוון ש- $a'_1(0) = 0$ ו- $a_{2m+1} = 0$ לכל m אזי $a'_{2m+1}(0) = 0$ $n = 0, 1, \dots$ בנוסף,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}$$

ומכיוון ש- $a'_0(r) = 0$ כי a_0 הוא שרירותי ניתן לפתור את משוואת הרקורסיה. מקבלים:

$$a'_{2m}(0) = (-1)^{m+1} \frac{H_m}{2^{2m} (m!)^2}$$

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$b_n = a'_n(0)$$

לכן פתרון שני נתון ע"י ($a_0 = 1$)

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}$$

y_2 פתרון שני.

בספרות נהוג לקחת פתרון שני :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]$$

כאשר γ הוא קבוע של אוילר.

מקרה 2:

$$\nu = \frac{1}{3}$$

$$r_{1,2} = \pm \nu = \pm \frac{1}{3}$$

$$a_1 = 0$$

$$r \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n \pm \frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

האם ניתן לחשב את כל המקדמים, כלומר האם המכנה לא מתאפס?

$$r_1 - r_2 \neq N \in \mathbb{N}$$

לכן ניתן לחשב את כל המקדמים

$$y_1(x) = |x|^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = |x|^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

את המקדמים מוצאים בנוסחת הרקורסיה.

מקרה 3:

$$\nu = \frac{1}{2}$$

$$r_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

עבור השורש הגדול $r_1 = \frac{1}{2}$ אין בעיה בחישוב נוסחת הרקורסיה:

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} = a_0 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

ניתן להשתמש בביטוי זה בשיטת הורדת הסדר, כדי לחשב את $y_2(x)$.

דרך 2: חישוב דרך נוסחת הרקורסיה:

a_0 שרירותי, a_1 שרירותי.

האם יש יותר מדי פתרונות ב"ת? נראה שלא.

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$r_1 - r_2 = 1 \in \mathbb{Z}$$

בעיה בנוסחת הרקורסיה? לא כי הנוסחה מתחילה מ- $n = 2$.
מקבלים:

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = a_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + a_1 \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{=y_1(x)}$$

מקרה 4: $\nu = 1$

$$r_{1,2} = \pm 1$$

"אין בעיות"

$$J_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$r_2 - r_1 = 2$$

$$a_2 = \overline{0}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+1)^2 - 1}$$

$$y_2(x) = aJ_1(x) \ln x + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

כאשר את המקדמים מוצאים ע"י הצבה במד"ר או ע"י הנוסחה שראינו:

$$c_n = \frac{d}{dr} [(r - r_2) a_n(r)]|_{r=r_1}$$

מערכות של n מד"רים מסדר ראשון

דוגמא. מד"ר אחד מסדר n :

$$y_{(t)}^{(n)} F(t, y, y', \dots, y(n-1))$$

ניתן להצגה כמערכת של n מד"רים מסדר ראשון ע"י הטרנספורמציה:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= y' \\&\vdots \\x_n &= y^{(n-1)}\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2 \\x_2'(t) &= x_3 \\&\vdots \\x_{n-1}'(t) &= x_n\end{aligned}$$

$$x_n' = F(t, x_1, \dots, x_n)$$

דוגמא. מערכת טורף-נטרף

$$x(t) = kx - axy \quad \text{נטרף}$$

$$y'(t) = vy + bxy \quad \text{טורף}$$

באופן כללי:

$$(*) \begin{cases} x_1'(t) = F_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

מערכת כללית של n מד"רים מסדר ראשון.

הגדרה. למערכת $(*)$ קיים פתרון בקטע הפתוח I קיימות n פונקציות $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ גזירות ברציפות על I שמקיימות את $(*)$ בכל נקודה ב- I . נוסף תנאי התחלה:

$$(**) \begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

משפט קיום ויחידות

אם הפונקציות $\{F_1, \dots, F_n\}$ ונגזרותיהם החלקיות לפי $x_1, \dots, x_n$ הם רציפות בתחום ה- $(n+1)$ ממדי $\mathbb{R}$. המכיל את הנקודה:

$$(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

אזי קיים קטע סביב t_0

$$t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$$

שבו קיים פתרון יחיד למערכת $(*)$ המקיימת את $(**)$. מערכת של n מד"רים מסדר 1 לינארית הפונקציות $F_1, \dots, F_n$ לינאריות ב- $x_1, \dots, x_n$

$$(*)_L \begin{cases} x'_1(t) = P_{11}(t)x_1 + \dots + P_{1n}x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = P_{n1}(t)x_1 + \dots + P_{nn}x_n + g_n(t) \end{cases}$$

כעת יש משפט קיום ויחידות הרבה יותר חזק:

משפט קיום ויחידות:

אם הפונקציות $\{P_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ ו- $\{g_i(t)\}_{i=1}^n$ הן רציפות בקטע הפתוח I המכיל את t_0 אזי קיים פתרון יחיד ל- $(*)_L$ המקיים את תנאי ההתחלה $(**)$ ופתרון זה תרף בכל הקטע I .

בגלל שהכתביה מייגעת ביותר נעבור במידת האפשר לכתוב מטריציוני:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & \dots & P_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1}(t) & \dots & P_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

נכתוב את $(*)_L$ בצורה

$$(\underline{x})'(t) = \underline{P}(t) \cdot \underline{x} + \underline{g}(t)$$

וכעת אפשר גם להפעיל כלים מאלגברה לינארית.
מערכת לינארית הומוגנית:

$$(*)_H \underline{x}'(t) = P(t)x$$

למה. אוסף הפתרונות של $(*)_H$ הוא מרחב לינארי.
כלומר אם $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ פתרונות ב"ת של המד"ר ולכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ אזי גם

$$\underline{x}(t) = c_1 \underline{x}_1(t) + c_2 \underline{x}_2(t)$$

פתרון.

הגדרה. k הפונציות ה- n ממדיות $\{\underline{x}^{(1)}(t), \dots, \underline{x}^{(n)}(t)\}$ נקראות בלתי תלויות בקטע I אם

$$c_1 \underline{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k \underline{x}^{(k)}(t) \equiv 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

למה. יהיו $\{\underline{x}^{(1)}(t), \dots, \underline{x}^{(n)}(t)\}$ k פתרונות של $x' = Px$ בקטע I ויהי $t_0 \in I$. אזי $\{\underline{x}^{(1)}(t_0), \dots, \underline{x}^{(k)}(t_0)\} \in \mathbb{R}^n$ בלתי תלויים לינארית $\Leftrightarrow k$ הוקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ הם בלתי תלויים לינארית.
כלומר מספיק לבדוק תלות לינארית בנקודה אחת.

הוכחה. ברור שתלות לינארית בכל I גוררת תלות לינארית ב- t_0 .
נתון שהוקטורים $\{x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(k)}(t_0)\}$ ת"ל.
כלומר קיימים $\{c_1, \dots, c_k\}$ לא כולם אפס כך ש-

$$c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_k x^{(k)}(t_0) = 0$$

נגדיר:

$$\underline{x}(t) = c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_k x^{(k)}(t_0) = 0$$

אזי $\underline{x}(t)$ הוא פתרון של $(*)_H$ שמקיים $\underline{x}(t) = 0$
לכן, ניחידות הפתרון נובע ש- $\underline{x}(t) = 0$ ב- I ולכן הוכחנו.

□

למה. מימד מרחב הפתרונות של $(*)_H$ הוא n .

הוכחה. נסמן

$$\underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ותהי $t_0 \in I$. נסמן ב- $\underline{x}^{(i)}(t)$ את הפתרון של $(*)_H$ שמקיים $\underline{x}^{(i)}(t_0) = \underline{e}_i$. קיים כזה פתרון ממשפט קיום ויחידות.

□

טענה. $\{x^j(t)\}_{j=1}^n$ הם ב"ת.

כי

$$\{\underline{e}_i\}_{i=1}^n = \{x^{(i)}(t_0)\}_{i=1}^n$$

ו- $\{\underline{e}_i\}_{i=1}^n$ ב"ת.

לכן מהלמה הקודמת נובעת אי תלות בקטע I .

טענה. $\{\underline{x}^{(i)}(t)\}_{j=1}^n$ פורשים את מרחב הפתרונות

כי יהי $\underline{x}(t)$ פתרון.

נגדיר

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underline{x}(t_0)$$

$$\underline{x} = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

כי שני האגפים הם פתרונות של $(*)_H$ שמזדהים ב- t_0 ומיחידות שווים.

הגדרה. קבוצה או מערכת בסיסית או יסודית של פתרונות של $(*)_H$ קבוצה ב"ת ופורשת.

הגדרה. יהיו $\{x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\}$ n פתרונות של $I(*)_H$ אזי

$$w(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = \begin{vmatrix} | & & | \\ x^{(1)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \\ | & & | \end{vmatrix}$$

לכן, $\{x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\}$ בת"ל אמ"ם $w(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) \neq 0$
 לכן, אם קיים $t_0 \in I$ כך ש- $w(x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)) \neq 0$ אזי $\{x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\}$ בת"ל.

נוסחת אבל למערכת הומוגנית:

$$w(t) = c \cdot e^{\int^t P_{11}(t) + \dots + P_{nn}(t) ds} = c \cdot e^{\int^t \text{trace}(P) ds}$$

לכן, $c \neq 0 \Rightarrow w \neq 0$ לכל t .

לכן, $c = 0 \Rightarrow w = 0$ לכל t .

מסקנה. אם $\{x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\}$ הם פתרונות של $(*)_H$ בקטע I אזי w הוא או זהותית 0 או אינו מתאפס בקטע.

הוכחה.

$$w(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = \begin{vmatrix} | & & | \\ x^{(1)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \\ | & & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

לכן,

$$w'(t) = \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{n1}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

נחשב:

$$\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x}$$

$$(\underline{\dot{x}})_i = (-P_i -) \begin{pmatrix} \underline{x} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n P_{ij} x_j$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n P_{1j}x_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n P_{nj}x_{jn} \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\
& = P_{11} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + P_{12} \begin{vmatrix} x_{21}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \\
& \quad + \dots + P_{1n} \begin{vmatrix} x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\
& \quad = P_{11}w + 0 + \dots + 0 = P_{11}w
\end{aligned}$$

□

פתרון מערכת מד"ר לא הומוגני עם מקדמים קבועים

$$x' = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נחפש פתרונות מהצורה

$$x(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{rt} = \underline{\xi} e^{rt} = \begin{pmatrix} \xi_1 e^{rt} \\ \vdots \\ \xi_n e^{rt} \end{pmatrix}$$

נציב במערכת:

$$r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{rt} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{rt}$$

$$A\underline{\xi} = r\underline{\xi}$$

לכן r הוא ע"ע של A עם וקטור עצמי $\underline{\xi} e^{rt} \Leftrightarrow x = \underline{\xi} e^{rt}$ הוא פתרון של המערכת.

דוגמא.

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

נחפש פתרון מהצורה

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{rt}$$

$$A\underline{\xi} = r\underline{\xi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{\xi} = r\underline{\xi}$$

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \underline{\xi} = 0$$

פתרונות לא טריוויאליים אם הדטרמיננטה שונה מאפס.

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4$$

$$r = 3, -1$$

ו"ע עבור $r_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \underline{\xi} = 0$$

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ו"ע נקבע עד כדי קבוע כפלי לכן

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

באופן דומה גם וקטור עצמי שני.
לכן שני פתרונות ב"ת של $(*)_H$ הם

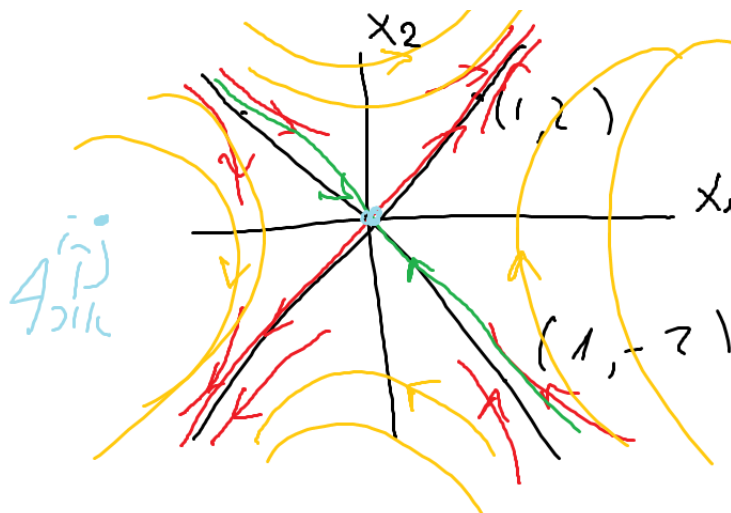
$$\underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\underline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

הפתרון הכללי הוא

$$x = c_1 \underline{x}^{(1)} + c_2 \underline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

איך נראה הפתרון במישור הפזה?



ניתוח כזה של נקודות אוקף תופס לכל מקרה בו יש שני ערכים עצמיים ממשיים עם סימנים הפוכים.

נחזור למקרה הכללי:

$$x' = Ax$$

נחפש פתרונות מהצורה

$$\underline{x} = \underline{\xi} e^{rt}$$

נציב:

$$r \underline{\xi} e^{rt} = A \underline{\xi} e^{rt}$$

$$(A - rI) \underline{\xi} = 0$$

לכן נתבונן בפולינום האופייני:

$$\det(A - rI) = 0$$

זהו פולינום ממעלה n עם שורשים $r_1, \dots, r_n$ לאו דווקא שונים.

מקרה I:

A מטריצה הרמיטית:

$$A^* = A$$

(הכללה של מטריצה ממשית סינטטית).

מאלגברה לינארית אנו יודעים שאם A הרמיטית אז כל הערכים העצמיים ממשיים וקיימים תמיד n וקטורים עצמיים בת"ל, גם אם יש ערכים עצמיים אם ריבוי גדול מ-1. לכן, אם A הרמיטית קיימים $r_1, \dots, r_n$ עם וקטורים עצמיים $\underline{\xi}^{(1)}, \dots, \underline{\xi}^{(n)}$ ולכן קיימים n פתרונות ב"ת למדר מהצורה:

$$\underline{x}^{(i)}(t) = \underline{\xi}^{(i)} e^{rt}$$

פתרונות אלו ב"ת כי

$$\begin{aligned} w(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) &= \left| e^{r_1 t} \begin{pmatrix} | \\ \xi^{(1)} \\ | \end{pmatrix} \quad \dots \quad e^{r_n t} \begin{pmatrix} | \\ \xi^{(n)} \\ | \end{pmatrix} \right| = \\ &= e^{r_1 + \dots + r_n} \left| \begin{pmatrix} | \\ \xi^{(1)} \\ | \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} | \\ \xi^{(n)} \\ | \end{pmatrix} \right| \neq 0 \end{aligned}$$

לכן, אם A הרמיטית הפתרון הכללי של

$$x' = Ax$$

נתון ע"י

$$\underline{x}(t) = \alpha_1 \xi^1 e^{r_1 t} + \dots + \alpha_n \xi^n e^{r_n t}$$

כאשר r_i ממשיים.

בפרט, אם A ממשית סימטרית גם ה"ע ממשיים.

דוגמא. מצא פתרון כללי של

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

נשים לב שמטריצת המקדמים A היא הרמיטית
לכן, קיימים 3 ע"ע עם 3 ו"ע ב"ת.

$$\det(A - xI) = -r^3 + 3r + 2 = 0$$

לכן, ע"ע $r_1 = 2, r_{2,3} = -1$
וקטורים עצמיים:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\xi^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מגיעים לפתרון הכללי: