



מד"ר 1 - הרצאה 11

Save a tree - don't write madar

2.1.11

פתרון מד"ר בעזרת טורים

משפט. תהי x_0 נקודה רגולרית של המד"ר

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$p = \frac{R}{P}, q = \frac{Q}{P}$$

הן אנליטיות ב- x_0 אזי הפתרון של המד"ר ניתן לכתיבה ע"י

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

כאשר a_1, a_2 שרירותיים, ו- y_1, y_2 פונקציות אנליטיות ב- x_0 , שהן בת"ל. בנוסף רדיוס ההתכנסות של y_1, y_2 הוא לפחות המינימום של רדיוסי ההתכנסות של p, q . המקדמים $\{a_n\}$ מתקבלים ע"י הצבה במד"ר והשוואת מקדמים.

והמפשט מצדיק את החישובים שעשינו בשיעור הקודם. לא נוכיח את המשפט. בכל מקרה, ההוכחה מסתמכת על ה- M בוחן של וירשטראס.

דוגמא.

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

α קבוע. מהו גודלו של רדיוס ההתכנסות של $y(x) = \sum a_n x^n$ כטור חזקות סביב $x_0 = 0$? $1 + x_0^2|_{x_0=0} \neq 0$ זוהי נקודה רגולרית.

$$y''(x) - \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=p} y' + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)}{1+x^2}}_{=q} y = 0$$

p, q מתפוצצות ב- $x = \pm i$ לכן רדיוס ההתכנסות של טור החזקות שלהם סביב $x_0 = 0$ הוא 1. עפ"י משפט רדיוס ההתכנסות של $y = \sum a_n x^n$ הוא לפחות 1. נניח $\alpha = 1$

$y = x$ הוא פתרון עם רדיוס התכנסות אינסופי. על הציר הממשי p, q חלקים, ממשפט קיום ויחידות למד"ר לינארי נובע שקיים פתרון גלובלי עבור $-\infty < x < \infty$.

האם מזה נובע שרדיוס ההתכנסות צריך להיות ∞ ? לא. לדוגמא $\frac{1}{1+x^2} = \sum a_n x^n$.

עד עכשיו טיפלנו רק במקרה של נקודה רגולרית $P(x_0) \neq 0$. מה קורה כאשר $P(x_0) = 0$?

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$y'' + \frac{Q}{P}y' + \frac{R}{P}y = 0$$

יש "בעיה" עם משפט קיום ויחידות כי מקדמים אינם חסומים ליד x_0 .

1. אולי קיים פתרון יחיד?

2. אולי אין פתרונות?

3. יש אינסוף פתרונות?

כבר טיפלנו במקרה בו המקדם של y'' מתאפס. זאת בדיוק משוואת אוילר.

1 תזכורת: משוואת אוילר

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

חיפשנו פתרונות מהצורה $y = x^r$
הצבנו

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

משוואה ריבועית, שני שורשים $\{r_1, r_2\}$.
אם $r_1 \neq r_2$

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

אם $r_1 = r_2$

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 (\ln x) x^{r_1}$$

עבור x כלשהו נציב $|x|$ במקום x .
נתבונן במד"ר

$$(*) x^2 y'' + x \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \right) y' + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i \right) y = 0$$

עבור $0 < x \ll 1$ (לכתוב ϵ) לקרב את המד"ר ע"י

$$x^2 y'' + x \alpha_0 y' + \beta_0 y \approx 0$$

נצפה $y(x) \sim y_{Euler}(x) = a_0 x^{r_1} + b_0 x^{r_2}$

אבל הפתרון המדויק יכיל איברים נוספים כתוצאה מהאיברים שזרקנו במד"ר. לכן נצפה
שם $r_1 \neq r_2$

$$y(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + x^{r_2}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = \\ = x^{r_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + x^{r_2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

וזה נשמע הגיוני.
מתי המד"ר

$$Py'' + Qy' + Ry = 0$$

הוא מהצורה $(*)$?

$$y'' + \frac{1}{x}(\sum \alpha_i x^i)y' + \frac{1}{x^2}(\sum \beta_i x^i)y = 0$$

$$y'' + \frac{Q}{P}y' + \frac{R}{P}y = 0$$

לפונקציות
 $\frac{1}{x}$ פונקציה אנליטית $\frac{Q}{P}$.
 $\frac{1}{x^2}$ פונקציה אנליטית $\frac{R}{P}$.
 במילים אחרות $x \cdot \frac{Q}{P}, x^2 \cdot \frac{R}{P}$ הן פונקציות אינליטיות.

הגדרה. הנקודה x_0 תקרא נקודה סינגולרית-רגולרית של המד"ר

$$Py'' + Qy' + Ry = 0$$

אם $P(x_0) = 0$ ובנוסף מתקיים

$$(x - x_0)^2 \frac{R_1(x)}{P_1(x)}, (x - x_0) \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}$$

הן אנליטיות ב- x_0 כלומר היא ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0 בעל רדיוס התכנסות > 0 .

הגדרה. אם x_0 נקודה סינגולרית אבל לא רגולרית אזי היא נקראת נקודה סינגולרית לא רגולרית.

לנקודות סינגולריות-רגולריות יש תורה סגורה שפותחה ע"י פרובניוס.
הערה. בפועל מספיק לבדוק אם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

וכן,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$$

הם סופיים כי הרכבת פונקציות אלמנטריות היא אנליטית בכל מקום בו היא מוגדרת.

דוגמא. מיון את הנקודות הסינגולריות של המד"ר

$$2(x-2)^2 xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

הנקודות הסינגולריות הן $\{0, 2\}$

$$y'' + \underbrace{\frac{3}{2(x-2)^2}}_{=p} y' + \underbrace{\frac{1}{2x(x-2)}}_{=q} y = 0$$

עבור $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0$$

גדלים סופיים ולכן $x_0 = 0$ נקודה סינגולרית רגולרית.
עבור $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)p(x) = \infty$$

לכן נקודה סינגולרית לא רגולרית.

2 שיטת פרובניוס

בה"כ נניח $x_0 = 0$.

$$L(y) = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0$$

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)x^n$$

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)x^n$$

מתכנסים בקטע $0 \leq |x| < \rho$, $\rho > 0$.

עבור $x > 0$ נחפש פתרון מהצורה

$$y(x; r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

כאשר $a_0 \neq 0$

עבור $0 < |x|$ נחפש פתרון מהצורה

$$y = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

בהנחה שמותר לגזור איבר-איבר.

$$y'(x; r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y''(x; r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \left(\sum_k = 0^\infty p_k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} \right) + \\ + \left(\sum_k = 0^\infty q_k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \right) = 0 \end{aligned}$$

נגדיר:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

לכן,

$$F(r+n) = (r+n)(r+n-1) + p_0(r+n) + q_0$$

ואז,

$$\begin{aligned} L(y) &= \\ &= a_0 x^r [r(r-1) + p_0 r + q_0] + \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) + a_n (n+r) p_0 + a_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [a_k (k+r) p_{n-k} + q_{n-k}] \right] x^{n+r} \end{aligned}$$

$$L(y) = a_0 F(r) \cdot x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [a_k(k+r)P_{n-k} + q_{n-k}] \right] x^{r+n} = 0$$

מכיוון ש- $a_0 \neq 0$ נובע ש- $F(r) = 0$ כלומר,

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

נקראת משוואה אינדיאלית.
משוואה ריבועית, פתרונות $\{r_1, r_2\}$ בדיק משוואה עבור r במשוואת אוילר עם מקדמים q_0, p_0 .

$$\{\} = 0$$

$$a_n F(n+r) + \sum_{k=0}^{n-1} [a_k(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{F(n+r)} \sum_{k=0}^{n-1} [a_k(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]$$

קשר הרקורסיה עבור $n \geq 1$.

1. אגף ימין תלוי ב- $\{a_0, \dots, a_n\}$.

2. $a_n = a_n(r)$.

3. מתי לא נוכל לחשב את כל מקדמים? אם $F(n+r)$ מתאפס עבור איזשהו $1 \leq n$

$$F(r) = 0 \Rightarrow r = r_1, r_2$$

() אם $r_1 > r_2$ ממשיים. לכן $F(r_1 + n) \neq 0$ לכל $n \geq 1$. לכן, עבור r_1 ניתן לחשב את כל המקדמים. לכן קיים פתרון מהצורה

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$$

כאשר a_0 שרירותי ו- $a_n(r)$ נתונים ע"י נוסחת הרקורסיה עם $r = r_1$.

מה לגבי $y_2(x)$?

יהיו בעיות אם $F(r_2 + n) = 0$ כלומר $r_2 + n = r_1$ כלומר רק אם $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$.

אם $N \in \mathbb{N}$ אזי $r_1 - r_2 \neq 0$ אזי $F(r_2 + n) \neq 0$ לכל $n \geq 1$ ולכן

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$$

כאשר a_0 שרירותי ו- $a_n(r_2)$ נתונים ע"י נוסחת הרקורסיה $n \geq 1$.

אם $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$ אזי (לא נראה את הפיתוח)

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln |x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

והמקדמים b_n נתונים ע"י:

$$b_0 = 1$$

$$b_n = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]$$

אבל לרוב נוח יותר לחשב ע"י הצבת $y_2(x)$ במד"ר והשוואת חזקות.
עבור $n = 1, 2, \dots, r = r_2$

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2)a_N(x)$$

$$F(r_{1,2} + n) \neq 0 \text{ אז } \mu \neq 0, r_{1,2} = \lambda \pm i\mu \quad ()$$

ואז

$$y_{1,2}(x) = |x|^{\lambda \pm i\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda \pm i\mu) x^n$$

אם רוצים זוג פתרונות ממשיים לוקחים את החלק הממשי והחלק המדומה
(בדיוק כמו באוילר).

$r = r_1 = r_2$ ממשיים. $()$

$F(r + n) \neq 0$ לכל $n \geq 1$,
ולכן,

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$$

a_0 שרירותי ו- $a_n(r)$ נתונים ע"י נוסחת הרקורסיה.

מה עם הפתרון השני?

$$y(x; r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^{n+r}$$

כאשר $a_n(r)$ נתונים ע"י נוסחת הרקורסיה.

$$(**) Ly(x; r) = a_0 p(x) x^r = a_0 c(r - r_1)^2 x^r$$

אם נציב $r = r_1$ נקבל

$$L \underbrace{y(x; r_1)}_{y_1(x)} = 0$$

נגזור את $(**)$ לפי r ונציב $r = r_1$.

$$L \frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{r=r_1} =$$

$$= \frac{d}{dr} (a_0 c (r - r_1)^2 x^r) = a_0 c (2(r - r_1) x^r + (r - r_1)^2 r x^{r-1}) \Big|_{r=r_1} = 0$$

$$y_2(x) = \frac{d}{dr} \left[x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^n \right] \Big|_{r=r_1} =$$

$$= \ln x \cdot x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^n \Big|_{r=r_1} + x^r \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r) x^n \Big|_{r=r_1} =$$

$$= \ln x y_1(x) + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_1) x^n$$

מכיוון ש- a_0 שרירותי לכן $a'_0(r) = 0$ ולכן:

$$y_2(x) = \ln x y_1(x) + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n$$

עבור x כללי:

$$y_2(x) = \ln |x| y_1(x) + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

כאשר $b_n = a'_n(r_1)$ או ע"י הצבה ישירה במד"ר.

לפעמים הכי קל למצוא את y_2 בעזרת y_1 ושיטת הורדת הסדר.

ניתן להוכיח בכל המקרים שרדיוס ההתכנסות של הטורים הוא $\rho \geq 0$ ולכן אלו טורים של פונקציות אנליטיות.

דוגמא. משוואת בסל מסדר ν :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

מאיפה היא נפלה עלינו?

זה החלק הרדיאלי של הלפלסיאן (אם זה אומר משהו לקורא החרוץ).

נפתח סביב $x_0 = 0$. זאת נקודה סינגולרית-רגולרית.

לא נציב בנוסחאות אלה נניח את הטור ונפתח.

נחפש פתרון מהצורה:

$$y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

a_0 שרירותי ו- $a_n = a_n(r)$ עובר $n \geq 1$. נציב במד"ר:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

נסדר כך שכל הטורים יהיו עם חזקה x^{n+r} .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

עבור $n \geq 2$ הטורים מוגדרים אבל יש בעיה ל $n = 0, 1$ עם הטור השלישי.

$$a_0[r(r-1) + r - \nu^2]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1) - \nu^2]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n((n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2) + a_{n-2}]x^{n+r} = 0$$

$$a_0(r^2 - \nu^2) = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \nu$$

אם $\nu = 0$ אז $r_1 = r_2$ ואם $\nu \neq 0$ אזי $r_1 \neq r_2$.

$$0 = a_1((1+r)^2 - \nu^2) \stackrel{1}{=} a_1(1+2r)$$

1. כי $r^2 = \nu^2$

לכן אם $r \neq -1/2$ אזי $a_1 = 0$ ואם $r = -1/2$ אזי a_1 שרירותי.
נוסחת הרקורסיה:

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2 - \nu^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

מקרה I: $\nu = 0$

לכן, $r_1 = r_2 = 0$

במקרה זה קיים פתרון אחד מהצורה:

$$b = |x|^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כלומר פתרון אנליטי. כאן a_0 שרירותי, $a_1 = 0$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$$

$$n = 2, 3, \dots$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0 \text{ לכן}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^m (m!)^2}$$

לכן מצאנו את הפתרון

$$y_1(x) = a_0 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^m (m!)^2}}_{J_0(x)}$$

מה לגבי הפתרון השני?
ראינו

$$y_2(x) = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

כאשר $y_1 = J_0(x)$
אפשרות ראשונה הצבת y_2 במד"ר והשוואת מקדמים.
אפשרות שנייה היא $b_n = \frac{d}{dr} a_n(r)|_{r_1}$.
אם רוצים לפתור בדרך השנייה לא נוכל להשתמש במה שמצאנו כי כבר נפתרנו שם מה- r .
לכן צריך לפתור את נוסחת הרקורסיה עבור r כללי.
משוואה עבור $a_1(x)$ כאשר $\nu = 0$.

$$a_1(r)[1+r]^2 = 0$$

$$a_1'(r)(1+r^2) + a_1'(r) \cdot 2(r_1) = 0$$

$$r = 0 \text{ נציב}$$

$$a_1'(0) \cdot 1 + \underbrace{a_1(0)}_{=0} \cdot 2 = 0$$

לכן,

$$a_1'(0) = 0$$

$$(n+r)62 \cdot a_n(r) = a_{n-2}(r)$$

נגזור לפי r

$$2(n+r)a_n(r) + (n+r)^2 a_n'(r) = a_{n-2}'(r)$$

עכשיו נציב $r = 0$,

$$2na_n(0) + n^2 a_n'() = -a_{n-2}'(0)$$