



מד"ר 1 - הרצאה 10

Save a tree - don't write madar

26.12.10

פתרון מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים

נתונה המשוואה

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ קבועים ממשיים.

נחפש פתרונות מהצורה $y = e^{rx}$:

נקבל את המשוואה האופיינית:

$$l(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

מקרה 1: כל n השורשים $r_1, \dots, r_n$ הם ממשיים ופשוטים, לכן הפתרון הכללי נתון ע"י

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{r_i x}$$

מקרה 2: שורשים מרוכבים פשוטים

אז לכל זוג שורשים מרוכבים פשוט $r = \alpha \pm i\beta$

מניבים זוג פתרונות:

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

דוגמא.

$$y''' + y' = 0$$

נחפש פתרונות

$$y = e^{rx}$$

$$l(r)=r^3+r=0$$

$$r_{1,2,3}=0,+i,-i$$

$$y_1=1$$

$$y_2=e^{ix}$$

$$y_3=e^{-ix}$$

כלומר

$$y_2=\cos x$$

$$y_3=\sin x$$

נוודא שהפתרונות ב"ת

$$w(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

נוודא שמתקיימת נוסחת אבל

$$w=ce^{-\int^xP_1(t)dt}$$

P_1 מקדם הנגזרת השנייה בגובהה.
 $P_1=0$ לכן $w=c$

מקרה 3: למשוואה אופיינית יש שורש ממשי r_1 מריבוי $s>1$. לכן,

$$l(r_1)=l'(r_1)=\ldots=l^{(s-1)}(r_1)=0$$

$$L^{(s)}\neq 0$$

יודעים

$$L[e^{rx}]=e^{rx}l(r)$$

נגזור לפי r .

$$L[xe^{rx}] = e^{rx}[xl(r) + l'(r)]$$

נגזור שוב לפי r

$$L[x^2e^{rx}] = e^{rx}[x^2l(r) + 2xl'(r) + l''(r)]$$

$\vdots$

נציב $r = r_1$

$$0 = L(e^{r_1x}) = L[xe^{r_1x}] = \dots = L[x^{s-1}e^{r_1x}]$$

$$L[x^s e^{r_1x}] \neq 0$$

מסקנה. לכל שורש ממשי r_1 מריבוי s מתאימים s הפתרונות הב"ת

$$\{e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \dots, x^{s-1}e^{r_1x}\}$$

מקרה 4: שורשים מרוכבים מריבוי s .
לכל זוג שורשים $\lambda = \alpha \pm i\beta$ מריבוי s מתאימים $2s$ הפתרונות הממשיים:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{s-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{s-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$$

דוגמא. מצא פתרון כללי של

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

נציב

$$y = e^{rx}$$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

השורשים הם $\pm i$ מריבוי 2.
לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

מד"ר לינארי מסדר n לא הומוגני

משפט. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y(x)$ הפתרון הכללי

$y_h(x)$ הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$y_p(x)$ פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית

והוכחנו עבור סדר 2. ההוכחה מאוד דומה. נותר רק לגלות כיצד מוצאים פתרון פרטי.

שיטות למציאת פתרון פרטי

1. שיטת המקדמים הלא ידועים ניתן להפעלה כאשר המקדמים במשוואה ההומוגנית הם קבועים, כלומר

$$Ly = a_0 y^{(s)} + \dots + a_n y$$

$a_0, \dots, a_n, a_0 \neq 0$ קבועים.

וכאשר $g(x)$ מהצורות הבאות:

$$g(x) = P_n(x) \quad ()$$

במקרה זה $y_p(x) = x^s Q_n(x)$ כאשר s הוא הריבוי של 0 כשורש של הפולינום האופייני $l(r)$.

$$g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \quad ()$$

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$$

כאשר s הוא הריבוי של α כשורש של $l(r)$.

$$g(x) = e^{\alpha x} (P_{n_1}(x) \cos \beta x + P_{n_2}(x) \sin \beta x) \quad ()$$

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} (Q_n^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_n^{(2)}(x) \sin \beta x)$$

כאשר $n = \max\{n_1, n_2\}$

ו- s הוא הריבוי של $\alpha + \beta i$ השורש של $l(r)$.

דוגמא. מצא פתרון פרטי עבור

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}$$

משוואה אופיינית

$$r^3 - 4r = 0$$

$$r = 0, -2, 2$$

נמצא פתרון פרטי עבור $y_{p1} = x$, $y_{p2} = \cos x$, $y_{p3} = e^{-2x}$

ומעקרון הסופרפוזיציה $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$

כאשר $y_{p1} = x(A_0x + A_1)$

$$y_{p2} = B_1 \cos x + B_2 \sin x$$

$$y_{p3} = Cxe^{-2x}$$

נציב ונחשב מקדמים:

$$y_p = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

2. שיטת וריאצית הפרמטרים

$$Ly = g(x)$$

$$L = y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y$$

הוכחה. אנו מכירים מערכת יסודית של $Ly = 0$.

$$\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = r_1(x)u_1(x) + \dots + c_n(x)u_n(x)$$

n דרגות חופש ואילוץ אחד. לכן נוסיף $n - 1$ אילוצים

$$\begin{cases} c'_1(x)u_1(x) + \dots + c'_n(x)u_n(x) = 0 \\ c'_1(x)u'_1(x) + \dots + c'_n(x)u'_n(x) = 0 \\ \vdots \\ c'_1(x)u_1^{(n-2)}(x) + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases}$$

נשים לב ש-

$$P_n(x) \cdot /y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + \dots + c_n(x)u_n(x)$$

$$P_{n-1}(x) \cdot /y'_p(x) = c_1(x)u'(x) + \dots + c_n(x)u'_n(x) + \underbrace{c'_1u_1 + \dots + c'_nu_n}_{=0}$$

$$y''_p(x) = c_1(x)u''(x) + \dots + c_n(x)u''_n(x)$$

$$+ \vdots$$

$$P_1(x) \cdot /y_p^{(n-1)} = c_1(x)u_1^{(n-1)} + \dots + c_n(x)u_n^{(n-1)}$$

$$y_p^{(n)} = c_1(x)u_1^{(n)} + \dots + c_n(x)u_n^{(n)} + c'_1(x)u_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-1)}$$

$$L[y_p] = c_1(x) \underbrace{L[u_1]}_{=0} + \dots + c_n(x) \underbrace{L[u_n]}_{=0} + c'_1(x)u_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-1)}$$

לכן, ל- $n-1$ האילוצים נוסף א המשוואה

$$c'_1(x)u_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-1)} = g(x)$$

לכן המשוואות עבור $\{c'_1, \dots, c'_n\}$ הן:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

קיים פתרון אחד ויחיד כי

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = w(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

□

דוגמא. חשב פתרון פרטי עבור

$$y''' - y'' - y' + y = g(x)$$

מכיוון ש- g לא נתונה נפעיל שיטת וריאצית המקדמים.

חישוב מערכת בסיסית

$$l(r) = r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

השורשים הם $1, 1, -1$.

לכן $\{e^x, xe^x, e^{-x}\}$ מערכת בסיסית:

נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x + c_3(x)e^{-x}$$

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

נפתור בעזרת כלל קרמר:

$$w = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 4e^x$$

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ g & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{w} = \frac{(-2x-1)g(x)}{4e^x}$$

$$c'_2 = \frac{2}{4e^x}g(x)$$

$$c'_3 = \frac{e^{2x}}{4e^x}g(x)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x + c_3(x)e^{-x} = \\ &= e^x \int^x \frac{-1-2t}{4e^t} g(t) dt + xe^x \int^x \frac{2}{4e^t} g(t) dt + e^{-x} \int^x \frac{e^{2t}}{4e^t} g(t) dt = \int^x G(x,t) g(t) dt \end{aligned}$$

$$G = \frac{1}{4} \{ e^{x-t} [-1 + 2(x-t)] + e^{-(x-t)} \}$$

פתרון מד"ר לינארי הומוגני בעזרת טורים

נדגים עם סדר 2.

$$P(x)y''(x) + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

הגדרה. אם $P(x_0) \neq 0$ נאמר כי הנקודה רגולרית ואם $P(x_0) = 0$ נאמר כי הנקודה סינגולרית.

פיתוח בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית.
רעיון: נחפש פתרון בצורה של טור חזקות סביב הנקודה הרגולרית. כלומר נחפש פתרון

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

דוגמא.

$$y'' + y = 0$$

כאן $P_1(x) \equiv 1$ לכן כל נקודה x_0 היא נקודה רגולרית.
נחפש פתרון בטור חזקות סביב $x_0 = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

רדיוס ההתכנסות ρ .

טור מתכנס לכל $|x - x_0| < \rho$ מתבדר לכל $|x - x_0| > \rho$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

נציב במד"ר

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

נבצע הזזת אינדקסים בטור הראשון כדי שבשני הטורים יהיו אותם חזקות:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{j=n-2}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j = \sum_{j=n}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

כעת,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n)x^n = 0$$

מימין זה פונקציית האפס ולא נקודת האפס. הדרך היחידה לקבל את פונקציית האפס היא שכל המקדמים הם 0.

$$n = 0, 1, \dots \quad a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \text{לכן}$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

קשר הרקורסיה. המכנה לא מתאפס לכן מוגדר היטב. אם המכנה יתאפס זה אומר שאין

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{k!} \quad a_4 = -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!} \quad a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2} \quad \text{לכן} \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos x + \sin x \end{aligned}$$

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

נשים לב:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'(0) = a_1$$

לכן a_0, a_1 נקבעים עפ"י תנאי ההתחלה $y(0), y'(0)$.

הערה. לרוב לא ניתן "לסכם" את הטור האינסופי.

דוגמא. משוואת *Airy*.

$$y'' = xy$$

כאן $P(x) \equiv 1$ לכן כל נקודה רגולרית. ננתח סביב $x_0 = 0$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)x^{n-2}$$

נציב במד"ר

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

נבצע הזזת אינדקסים ל- x^n .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$

$$a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

לכן,

$$a_2 = 0 \text{ לכן}$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots = 0$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

$$a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\frac{a_{3k}}{a_0} = \frac{1}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots ((2k-1) \cdot 2k)}$$

$$\frac{a_{3k+1}}{a_0} = \frac{1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \dots ((3k) \cdot (3k+1))}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k}}{a_0} x^{3k} \right) + a_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k+1}}{a_0} x^{3k+1} \right)$$

שאלות:

1. רדיוס ההתכנסות של הטורים?

$$\frac{a_{3k+3} x^{3k+3}}{a_{3k} x^{3k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

הטור מתכנס לכל x .

2. מצאנו שני פתרונות. האם הם ב"ת?

$$y = a_0 y_1(x) = a_1 y_2(x)$$

$$w(y_1, y_2) = ?$$

נשים לב:

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$$

לכן

$$w(y_1, y_2)(x=0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

לכן הפתרונות ב"ת.

חדשות טובות - למדנו לפתור משוואות שלא ידענו לפתור.
האם השיטה תמיד עובדת?

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

כאשר x_0 נקודה רגולרית של

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

1. האם תמיד ניתן לחשב את ה- $\{a_n\}$?

2. האם הטור מתכנס?

3. האם הטור באמת פתרון של המד"ר?

תשובות:

1. $a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} = (*)$ לכן אם ניתן לחשב את $y^{(n)}(x_0)$ אז ניתן לחשב גם את a_n .
מכיוון ש- $P(x_0) \neq 0$ נחלק מד"ר ב- $P(x)$

$$(1)y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$p(x) = \frac{Q}{P}$$

$$q(x) = \frac{R}{P}$$

$$y'' = -py' - qy$$

$$2!a_2 = y''(x_0) = -p(x_0) \underbrace{y'(x_0)}_{a_1} - q(x_0) \underbrace{y(x_0)}_{a_1}$$

לכן בהנחה ש- a_1, a_0 יודעים את a_2

$$3!a_3 = y'''(x_0) = (-py' - qy)'|_{x=x_0}$$

$$a_0, a_1, a_2$$

יודעים.

הגדרה. פונקציה $f(x)$ היא אנליטית ב- x_0 אם f גזירה ∞ פעמים ב- x_0 ואם לטור החזקות המתאיר

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

יש רדיוס התכנסות > 0 .

רדיוס ההתכנסות של פונקציה אנליטית:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

עבור $|x| < 1$.

רדיוס ההתכנסות נקבע באמצעות הנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר. בשביל זה צריך להתבונן דרך המישור המרוכב.