

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

3 במאי 2016

1 צורות ז'ורדן

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det(xI - A) = (x-3)(x+2)(x-1) + 6(x-1) + (x-3) - (x+2) + 3 + 2 = \\ &= x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \end{aligned}$$

אזי הערכים העצמיים הם 0, 1, עם ריבויים אלגבריים 1, 2 בהתאמה. נחפש ווקטור עצמי עם ערך עצמי 0, ובפרט

$$\ker(A - 0 \cdot I) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ונבחר } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ כעת עבור } 1,$$

$$\begin{aligned} \ker(A - I) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{לכן נבחר } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ונחפש } v_2 \text{ כך שיתקיים}$$

$$(A - I)v_2 = v_1$$

כלומר יש לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן

$$v_2 \in \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 2+z \\ 1+z \\ z \end{pmatrix}$$

ונבחר $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. נבחר את הבסיס $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ויתקיים

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים

$$[Id]_B^E A [Id]_E^B$$

כאשר

$$[Id]_E^B = P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, [Id]_B^E = P^{-1}$$

באופן כללי, אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס לזרדן של A , J צורת לזרדן של A , אזי

$$\begin{aligned} A &= P \cdot J \cdot P^{-1} \\ P &= \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה נוספת:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3 \\ A - 2I &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - 2I) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ (A - 2I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (A - 2I)^3 &= 0 \end{aligned}$$

לכן נבחר כך:

$$\begin{aligned} v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I)^3 \setminus \ker(A - 2I)^2 \\ v_2 &= (A - 2I)v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I)^2 \setminus \ker(A - 2I) \\ v_1 &= (A - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I) \end{aligned}$$

ולכן נקבל צורת זיורדן

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

2 מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה 2.1 מכפלה פנימית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$ היא תבנית בי-לינארית סימטרית חיובית לחלוטין.

מכפלה פנימית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$ היא תבנית $\langle u, v \rangle$ המקיימת את כל התכונות של תבנית בי לינארית סימטרית חיובית לחלוטין, פרט לשתי התכונות הבאות:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$$

דוגמאות

1. $u, v \in \mathbb{R}^n$, נגדיר

$$\langle u, v \rangle = u^T v = v^T u = \sum_i u_i v_i$$

כנ"ל עבור $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle u, v \rangle = u^T \bar{v} = \bar{v}^t u = \sum_i u_i \bar{v}_i$$

2. עבור $\mathbb{R}$:

$$\langle u, v \rangle = u^T A v$$

כאשר A סימטרית חיובית לחלוטין.

עבור $\mathbb{C}$: נצטרך

$$u^T A \bar{v} = \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{v^T A u} = \bar{v}^T \bar{A} u = u^T \bar{A}^T \bar{v}$$

ולכן נדרוש

$$\bar{A}^T := A^* = A$$

נקראת מטריצה הרמיטית.

3. עבור $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, נוכל להגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

עבור $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, נוכל להגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

ספציפית עבור $f, g \in \mathbb{C}_n[x]$ נקבל

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 \sum_{i,j=0}^n a_i \bar{b}_j x^{i+j} \, dx = \sum_{i,j=0}^n a_i \bar{b}_j \int_0^1 x^{i+j} \, dx = \sum_{i,j=0}^n a_i \bar{b}_j \cdot \frac{1}{i+j+1} = \\ &= ((a_i)_{i=0}^n)^T \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{i,j=0}^n (\bar{b}_j)_{j=0}^n \end{aligned}$$

4. נקבע $p_1, \dots, p_n > 0$ כך שמתקיים $p_1 + \dots + p_n = 1$ כעת

$$\langle u, v \rangle = \sum p_i u_i v_i$$

ומכאן ניתן לראות (ברגע שלומדים את הנושאים הללו) ששוונות ושוונות משותפת הן למעשה מכפלות פנימיות.

הגדרנו גם נורמה של ווקטור:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u \rangle > 0 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} > 0 \end{aligned}$$

אי שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

אי שוויון המשולש:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

נראה שקושי שוורץ גורר את אי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle \\ (\|u\| + \|v\|)^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \end{aligned}$$

לכן

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \iff 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle \leq 2\|u\|\|v\|$$

ואכן מקושי שוורץ

$$2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle \leq 2|\langle u, v \rangle| \leq 2\|u\|\|v\|$$

ניתן לראות שקילות גם בכיוון השני.
בזכות כל הגיאומטריה הזו, ניתן להגדיר זווית בין שני ווקטורים:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}$$

הגדרה 2.2 ווקטור u ניצב לווקטור v (מסומן $u \perp v$) אם $\langle u, v \rangle = 0$. הווקטורים נקראים אורתוגונאליים.

בהנתן תת מרחב $U \subseteq V$ מגדירים את המרחב הניצב לו:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U \ u \perp v\}$$

$U^\perp$ הוא מרחב ווקטורי.

טענה 2.3 $V = U \oplus U^\perp$. בנוסף, $(U^\perp)^\perp = \text{span}\{U\}$.

למשל

$$\left(\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\}$$

כמו כן, במרחב $\mathbb{C}_2[x]$

$$x^\perp = \left\{ f \in \mathbb{C}_2[x] \mid \int_0^1 x \overline{f(x)} \, dx = 0 \right\}$$