

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

12 באפריל 2016

1 תבניות בי-לינאריות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה F , $\text{char} F \neq 2$. פונקציונאל בי-לינארי הוא העתקה

$$\xi : V \times V \rightarrow F$$

המקיימת

$$\begin{aligned}\forall v, u, u' \in V, \alpha \in F \\ \xi(u + u', v) &= \xi(u, v) + \xi(v, u) \\ \xi(\alpha u, v) &= \alpha \xi(u, v) \\ \xi(v, u + u') &= \xi(v, u) + \xi(v, u') \\ \xi(v, \alpha u) &= \alpha \xi(v, u)\end{aligned}$$

תכונות:

1. פונקציונאל בי-לינארי הוא סימטרי אם

$$\forall u, v \in V \quad \xi(u, v) = \xi(v, u)$$

2. פונקציונאל בי-לינארי הוא אנטי-סימטרי אם

$$\forall u, v \in V \quad \xi(u, v) = -\xi(v, u)$$

3. פונקציונאל בי-לינארי סימטרי הוא לא מנוון אם

$$\forall u \neq 0 \in V \quad \exists v \in V : \xi(u, v) \neq 0$$

דוגמאות:

1. $V = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$, נגדיר

$$\xi \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = u_1 v_1 - u_2 v_2$$

סימטרי:

$$\xi \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = u_1 v_1 - u_2 v_2 = \xi \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$

וכן לא מנוון - ניתן למצוא ממש את הווקטור המתאים לכל ווקטור.

2. $V = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$, נגדיר

$$\xi \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = u_2 v_1 - u_1 v_2$$

אנטי-סימטרי, מתכונות של דטרמיננטה, וכן לא מנוון - שוב, ניתן ממש למצוא ווקטור.

3. $V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$ ונגדיר

$$\xi(u, v) = u^T \cdot v$$

הלינאריות מתקבת מתכונות של כפל מטריצות. סימטרי, לא מנוון.

4. $V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$, ניקח $A \in M_n(\mathbb{R})$ ונגדיר

$$\xi(u, v) = u^T A v$$

במקרה הכללי לא ניתן להבטיח סימטריות, אנטי-סימטריות או ניוון - כל התכונות הללו תלויות בתכונות של A .

5. F שדה עם $\text{char} F \neq 2, V = F^n$, ניקח $T : V \rightarrow V^*$ ונגדיר

$$\xi(u, v) = (T(u))(v)$$

במקרה הכללי לא ניתן להבטיח סימטריות, אנטי-סימטריות או ניוון - כל התכונות הללו תלויות בתכונות של T .

נתמקד בדוגמה 4.

טענה 1.2 כל פונקציונאל ξ ניתן להציג בתור $\xi(u, v) = u^T A v$ עבור $A \in M_n(F)$

הוכחה: ניקח $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס של V , ונגדיר $A_{i,j} = \xi(b_i, b_j)$. נראה שאכן מתקיים:

$$\xi(u, v) = [u^T]_B \cdot A [v]_B$$

מההגדרה

$$\xi(b_i, b_j) = [b_i^T]_B \cdot A [b_j]_B = e_i^T \cdot A \cdot e_j = A_{i,j}$$

■

בתרגיל בית נסיק מלינאריות שהדבר נכון לכל u, v .

שאלה מתי שתי מטריצות מייצגות אותה העתקה בי־לינארית בבסיסים שונים?

פתרון נניח כי A_B, A_C מייצגות את ההעתקה ξ לפי בסיסים B, C בהתאמה. ניקח $P = [Id]_C^B$ ונטען

$$\xi(u, v) = [u^T]_B A_B [v]_B = [u^T]_B P^T A_C P [v]_B$$

ואכן, $P[v]_B = [v]_C$ וכן

$$[u^T]_B P^T = (P[u]_B)^T = [u^T]_C$$

ולכן

$$[u^T]_B P^T A_C P [v]_B = [u^T]_C A_C [v]_C$$

2 צורת ז'ורדן

בלוק ז'ורדן:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

מטריצת ז'ורדן:

$$J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m))$$

משפט 2.1 (משפט ז'ורדן) יהי V מרחב ווקטורי מעל F , ותהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית. אזי אם f_T מתפרק למכפלת גורמים לינאריים קיים בסיס B בו $[T]_B$ היא מצורת ז'ורדן, והיא יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

2.1 איך מוצאים צורת ז'ורדן?

1. הריבוי האלגברי של λ הוא מספר הפעמים שהוא יופיע על האלכסון - כלומר סך הגדלים של הבלוקים שמתאימים לו.

2. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא כמות הבלוקים שמתאימים לו.

3. כמות הבלוקים של λ מגודל k לפחות הוא $\dim \ker (T - \lambda I)^k - \dim \ker (T - \lambda I)^{k-1}$.

4. גודל הבלוק המקסימלי של λ הוא החזקה של $(x - \lambda)$ בפולינום המינימלי.

תרגיל $A \in M_3(F)$ נילפוטנטית. הראו כי הריבוי הגיאומטרי של 0 קובע את צורת ז'ורדן של A .

פתרון מהנתון, $\lambda = 0$ הוא הערך העצמי היחיד, הריבוי האלגברי שלו הוא 3. אם הריבוי הגיאומטרי הוא 1, יש בלוק ז'ורדן יחיד ואז צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם הריבוי הגיאומטרי הוא 2, יש שני בלוקי ז'ורדן, והאפשרות היחידה לצורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם הריבוי הגיאומטרי הוא 3, יש שלושה בלוקים, ואז

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 איך מוצאים בסיס ז'ורדן?

נטפל בכל ערך עצמי בנפרד, נמצא עבורו קבוצה בלתי תלוייה לינארית, ובסוף נאחד את כל הקבוצות. נחפש את הקבוצה ההבלתי תלוייה המתאימה עבור λ עם ריבוי אלגברי m .

1. נחפש k כך שמתקיים

$$\dim \ker (A - \lambda I)^k = m$$

זוהי למעשה החזקה של $(x - \lambda)$ בפולינום המינימלי.

2. נגדיר $m_j = \dim \ker (A - \lambda I)^j - \dim \ker (A - \lambda I)^{j-1}$.

3. עבור k נבחר m_k ווקטורים בלתי תלויים מתוך

$$\ker(A - \lambda I)^k \setminus \ker(A - \lambda I)^{k-1}$$

ונסמנם $v_1, \dots, v_{m_k}$.

4. עבור $k-1$, ניקח את

$$(A - \lambda I)v_1, \dots, (A - \lambda I)v_{m_k}$$

ואם עדיין אין m_{k-1} ווקטורים, נשלים שרירותית מתוך $\ker(A - \lambda I)^{k-1} \setminus \ker(A - \lambda I)^{k-2}$ לקבוצה בלתי-תלוייה בגודל m_{k-1} .

5. ממשיכים באותו אופן עד 1.

6. לבסוף נסדר את הקבוצה בשרשראות:

$$(A - \lambda I)^k v_1, (A - \lambda I)^{k-1} v_1, \dots, v_1, \dots, (A - \lambda I)^m v_j, \dots, v_j, \dots$$

דוגמא מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון נחפש פולינום אופייני ונמצא

$$f_A(x) = x^5$$

לכן, יש ערך עצמי יחיד, $\lambda = 0$.

נתחיל בלחשב את הגרעין של חזקות של $(A - \lambda I)$.

$$\begin{aligned} \ker A &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_5 \right\} \\ \ker A^2 &= \operatorname{span} \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \\ \ker A^3 &= \mathbb{R}^5 \end{aligned}$$

מכאן נקבל שיש שני בלוקי ז'ורדן, והבלוק הגדול ביותר הוא מגודל 3, לכן צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

נחפש את הבסיס המתאים. נתחיל עם $j = 3, m_j = 1$. לכן נבחר ווקטור אחד מתוך $\ker A^3 \setminus \ker A^2$. לדוגמא $v_1 = e_3$. עבור $j = 2, m_j = 2$ אז ניקח את הווקטור $Ae_3 = e_4$, אבל אנחנו צריכים שני ווקטורים, אז נבחר באופן שרירותי מתוך $\ker A^2 \setminus \ker A$ למשל $v_2 = e_2$.

עבור $j = 1, m_j = 2$ אז ניקח את $e_1 - e_2$. $Ae_4 = e_5, Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$. נשאר

לסדר את הווקטורים:

$$\{e_5, e_4, e_3, e_1 - e_2, e_2\}$$

שאלה מצאו בסיס וצורת ז'ורדן עבור

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון הפולינום האופייני הוא

$$f_A(x) = (x-1)^2(x-2)^3$$

נטפל בערכים העצמיים בנפרד.

עבור $\lambda = 1$: יתאימו שני ווקטורים.

$$\begin{aligned} \ker(A - I) &= \text{span}\{e_5\} \\ \ker(A - I)^2 &= \text{span}\{e_4, e_5\} \end{aligned}$$

נתחיל עם $j = 2, m_j = 1$, נבחר שרירותית ווקטור מתוך $\ker(A - I)^2 \setminus \ker(A - I)$ - ניקח את e_4 .

עבור $j = 1, m_j = 1$, ניקח את $(A - I)e_4 = e_5$.
 לכן הסדרה שמתאימה לערך העצמי $\lambda = 1$ היא $\{e_5, e_4\}$.
 נעבור לטפל במקרה של $\lambda = 2$.

$$\ker(A - 2I) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A - 2I)^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נתחיל עם $j = 2, m_j = 1$, נבחר שרירותית את $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

עבור $j = 1, m_j = 2$, ניקח את $(A - 2I)v_3$, ועוד ווקטור v_4 מתוך $\ker(A - 2I)^2 \setminus \ker(A - 2I)$.
 בסך הכל נקבל שבסיס זיורדן הוא

$$\{v_4, (A - 2I)v_3, v_3, e_5, e_4\}$$