

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

8 במרץ 2016

1 פולינום אופייני

עבור

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

נתבונן בפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x-7 & -3 \\ -4 & x-11 \end{pmatrix} = \\ &= (x-7)(x-11) - 12 = x^2 - 18x + 65 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 65}}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 18, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 65 \end{aligned}$$

סך הכל, נקבל $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 13$. נחפש ווקטורים עצמיים:

$$\begin{aligned} \ker(A - 5I) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ \ker(A - 13I) &= \ker \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

כעת מתקיים, עבור $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} AP &= P \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עבור מטריצה מסדר 2 כללית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = x^2 - \operatorname{tr}(x) \cdot x + \det A \end{aligned}$$

עבור שיקוף ביחס לישר שזוויתו מהציר θ :

$$\begin{aligned} A_\theta &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ f_{A_\theta}(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

נקבל ערכים עצמיים $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. נחפש ווקטורים עצמיים:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos 2\theta + 1 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos 2\theta - 1 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת, מטריצת סיבוב:

$$\begin{aligned} R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ f_{R_\theta}(x) &= x^2 - 2 \cos \theta + 1 \\ x_{1,2} &= \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta} \\ v_{1,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ניקח דוגמה למטריצה מסדר 3:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -14 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+5 & -3 & 0 \\ 14 & x-8 & 0 \\ 2 & -3 & x-3 \end{pmatrix} = (x-3) \det \begin{pmatrix} x+5 & -3 \\ 14 & x-8 \end{pmatrix} = \\ &= (x-3)(x^2 - 3x + 2) = (x-3)(x-2)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ \lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

נתבונן בדוגמה הבאה:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -15 & 16 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \\ \lambda &= 1 \\ \ker \begin{pmatrix} -15 & 15 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

עבור המטריצה:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

2 פולינומים

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2 - 18x + 65, f_B(x) = x^2 - x - 1 \\ f_B(A) &= A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots \\ f_A(B) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 18 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 65I = \begin{pmatrix} 66 & -17 \\ -17 & 49 \end{pmatrix} \\ f_B(B) &= B^2 - B - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_A(A) &= A^2 - 18A + 65I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

משפט קיילי-המילטון (בהמשך) אומר לנו שתמיד מתקיים

$$f_A(A) = 0$$

כעת נעשה דבר דומה עבור טרנספורמציות. ניקח את D להיות טרנספורמצית הגזירה:

$$\begin{aligned}
 q(x) &= x^3 + 17 \\
 q(D) &= D^3 + 17 : p \rightarrow p^{(3)} + 17p \\
 [D]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 q([D]_B) &= [D]_B^3 + 17I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 24 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & n(n-1)(n-2) \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} + 17I = \\
 &= \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 6 & & \\ & 17 & 0 & 0 & 24 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & n(n-1)(n-2) \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 17 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

באופן כללי לטרנספורמציה T :

$$[q(T)]_B = q([T]_B)$$

ניקח את המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$f_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1 A_2 A_3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 A_3 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \rightarrow \text{span}\{e_1\} \rightarrow \text{span}\{e_1\} \rightarrow 0$$

$$e_2 \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\} \rightarrow \text{span}\{e_1\} \rightarrow 0$$

$$e_3 \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\} \rightarrow \text{span}\{e_1\} \rightarrow 0$$