

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

7 ביוני 2016

ראינו בהרצאה את המשפט הבא:

משפט 0.1 אם T נורמלית אזי $T^* = p(T)$ עבור פולינום כלשהו.

דוגמה למשל אם $T^* = T^{-1}$,

$$\begin{aligned}f_T(T) &= 0 \\f_T(x) &= x^n + \dots + (-1)^n \det T = X^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\(-1)^{n+1} \det T &= T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T = T(T^{n-1} + \dots + a_{n-1}) \\p(x) &= \frac{f_T(0) - f_T(x)}{x \cdot f_T(0)}\end{aligned}$$

טענה 0.2 אם W תת מרחב T -אינווריאנטי עבור T נורמלית, אזי W גם T^* -אינווריאנטי, והטרנספורמציה $T|_W$ נורמלית.

עבור T ניתנת ללכסון, מיהם תתי המרחבים האינווריאנטיים?

$$T \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים של T . לכן כל תתי המרחבים האינווריאנטיים הם כל הסכומים הישרים של תתי מרחבים של המרחבים העצמיים.

$$\begin{aligned}W &= W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k} \\W_{\lambda_i} &= W \cap V_{\lambda_i}\end{aligned}$$

לכל $w \in W$ נוכל לרשום

$$w = \sum w_{\lambda_i}, w_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$$

כשנפעיל את T נקבל

$$T^l w = \sum \lambda_i^l w_{\lambda_i} \in W$$

כעת נסמן

$$A = (\lambda_i^l)_{i=1, \dots, k}^{l=0, \dots, l-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

והמטריצה הפיכה כי λ_i שונים. כעת

$$Ae_i = (\lambda_i^l)_{l=0, \dots, k-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$e_i = A^{-1} \cdot (\lambda_i^l)_{l=0, \dots, k-1} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$(e_i)_j = \sum_l a_{j,l} \lambda_i^l = \delta_{i,j}$$

$$\sum_l a_{i,l} T^l w = \sum_{l,j} a_{i,l} \lambda_j^l w_{\lambda_j} = w_{\lambda_i}$$

$$w_{\lambda_i} \in W$$

$$w \in W_{\lambda_i}$$

אם W הוא אינווריאנטי אזי $W = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}$. על כל W_{λ_k} מתקיים $T|_{W_{\lambda_i}} = \lambda_i$ ולכן $T^*|_{W_{\lambda_i}} = \overline{\lambda_i}$, ולכן W הוא סכום ישר של תתי מרחבים עצמיים של T^* , ולכן הוא T^* אינווריאנטי.

למעשה רצינו למצוא $c_{i,l}$ כך שמתקיים

$$w_{\lambda_i} = \sum_{l=0}^{k-1} c_{i,l} T^l w = \sum_{l=0}^{k-1} c_{i,l} \sum_{j=1}^k \lambda_j^l w_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{l=0}^{k-1} c_{i,l} \lambda_j^l \right) w_{\lambda_j}$$

נבחר אותם כך שיתקיים

$$(c_{i,l}) = (\lambda_j^l)^{-1}$$

טענה 0.3 לכל העתקה T ממשית קיים תת מרחב אינווריאנטי מממד 1 או 2.

הוכחה: יהא לערך עצמי מרוכב של T . נגדיר $p(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2 \in \mathbb{R}[x]$ ונגדיר $K = \ker(p(T))$. אזי K מממד זוגי, הוא T -אינווריאנטי, וכן, לכל $v \in K$, $\operatorname{span}\{v, Tv\}$ הוא T -אינווריאנטי ומממד 2. $T|_K$ אינווריאנטי משום שמתקיים

$$(p(T))v = 0 \Rightarrow T(p(T))v = 0 \Rightarrow (Tp(T))v = 0 \Rightarrow p(T)(Tv) = 0$$

משום שכל פולינום של T מתחלף עם T . מימד K זוגי שכן $p(T|_K) = 0$, p אי פריק ממעלה 2, ולכן $m_{T|_K} = p^l$ ולכן $f_{T|_K} = p^l$. כעת $\dim K = \deg p^l = 2l$. העובדה על המרחב הנפרש מתקבלת משום שמתקיים לכל $v \in K$:

$$\begin{aligned} T^2v &= 2\operatorname{Re}\lambda Tv - |\lambda|^2 v \\ T^2v &\in \operatorname{span}\{v, Tv\} \end{aligned}$$

■

v, Tv בלתי תלויים שכן v אינו ווקטור עצמי של T .

המשך הטענה: קיים בסיס $v_1, \dots, v_l$ של K , שלפי בסיס זה

$$T \sim \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

כמו כן

$$\begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ניזכר שמתקיים במובן מסויים $\mathbb{C} \subseteq M_2(\mathbb{R})$, לפי $a + bi \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

טענה 0.4 אם $V = \mathbb{R}^n$, λ ערך עצמי מרוכב של T ממשית, $p(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$ אזי

$$\begin{aligned} \ker_{\mathbb{C}^n}(p(x)) &= (\mathbb{C}^n)_\lambda \oplus (\mathbb{C}^n)_{\bar{\lambda}} \\ \ker_{\mathbb{R}^n}(p(x)) &= \{v + \bar{v} \mid v \in (\mathbb{C}^n)_\lambda\} \end{aligned}$$

הכללה של ז'ירדון:

$$J_k(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & & \\ b & a & & 1 & \\ & & a & -b & \ddots \\ & & b & a & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & a & -b \\ & & & & & b & a \end{pmatrix}$$

כמו כן

$$J_k(a+bi) \stackrel{\mathbb{C}}{\sim} J_k(a-bi)$$

ובמקרה הנורמלי:

$$T \stackrel{\mathbb{R}, \perp}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_m & -b_m \\ b_m & a_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \mu_1 & \\ & & & & \overline{\mu_1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu_m \\ & & & & & & & \overline{\mu_m} \end{pmatrix}$$

למשל בפונקציות מחזוריות על $[0, 1]$ עם

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, ניזכר בקבוצה דמויית הבסיס האורתונורמלי שלנו $D^* = -D, Df = f'$ שנסמן את איבריה f_n . כעת, $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{n,m}$.

$$D|_{\text{span}\{f_{-N}, \dots, f_N\}} \stackrel{\mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} -2\pi i N & & & & \\ & -2\pi i (N-1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2\pi i (N-1) \\ & & & & & & 2\pi i N \end{pmatrix}$$

$$p(x) = (x - \lambda)(x + \lambda) = x^2 + 4\pi^2, \lambda = 2\pi i$$

עבור

$$\ker(p(D)) = \ker(D^2 + 4\pi^2) = \{f \mid f'' + 4\pi^2 f\}$$

כעת נכתוב $f = a \cos(2\pi x) + b \sin(2\pi x)$, ונכתוב

$$D|_{\{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x\}} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

וכן

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} D|_{\{1, \sqrt{2} \cos 2\pi x, \sqrt{2} \sin 2\pi x, \dots, \sqrt{2} \cos 2\pi n x, \sqrt{2} \sin 2\pi n x\}} \\ 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4\pi \\ -4\pi & 0 \end{pmatrix} \\ \ddots \\ \begin{pmatrix} 0 & 2\pi n \\ -2\pi n & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

עבור אוניטריות

$$U \stackrel{\mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

$$U \stackrel{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_n} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

כאשר R_{θ_i} מטריצת הסיבוב בזווית θ_i .