

אלגברה לינארית 2

© ארזים

19 במאי 2016

הראינו כי במרחב מכפלה פנימית, לכל טרנספורמציה T ישנה טרנספורמציה צמודה T^* המקיימת

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, T^*u \rangle$$

כמו כן, עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}/\mathbb{C}\}$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, הגדרנו $A^* = \overline{A}^t$, והוכחנו כי $(T_A)^* = T_{A^*}$.

משפט 0.1 תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית ויהי $B = \{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V . אם $A = [T]_B$ אזי $A^* = [T^*]_B$.

הערה 0.2 קריטי כאן שעובדים עם בסיס אורתונורמלי ולא סתם בסיס של V .

הוכחה: נזכר במטריצה $A = (a_{ij})$, המוגדרת על ידי

$$a_{ij} = (Te_j)_i = \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \right)_i$$

משום שהבסיס שלנו אורתונורמלי ומתוצאה שראינו בעבר מתקיים

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$$

מאותה נוסחה בדיוק, אם $C = (c_{ij})$ היא המטריצה שמייצגת את T^* , אזי מתקיים

$$c_{ij} = \langle T^*e_j, e_i \rangle$$

ולכן, אם נחשב, נקבל

$$c_{ij} = \langle T^*e_j, e_i \rangle = \langle e_j, (T^*)^*e_i \rangle = \langle e_j, Te_i \rangle = \overline{\langle Te_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

■ כפי שרצינו - זה מוכיח את המשפט.

נשים לב שבפרט, התוצאה נותנת לנו שאם $T = T_A$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, וכן $\{e_i\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית (שהוא כמובן אורתונורמלי) אזי

$$[(T_A)^*]_B = A^*$$

מעתה נחקור יותר לעומק טרנספורמציות לינאריות T המקיימות קשרים מיוחדים בין T, T^* .

הגדרה 0.3 טרנספורמציה לינארית $T : V \rightarrow V$ על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$ נקראת צמודה לעצמה (מעל $\mathbb{C}$ - הרמיטית, מעל $\mathbb{R}$ - סימטרית) אם $T = T^*$.

ראינו כבר דוגמה כזו - גזירה פעמיים במרחב הפונקציות בעלות מחזור 1 וגזירות אינסוף פעמים, כאשר

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$$

באופן מפורש, T צמודה לעצמה אם לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, Tu \rangle$$

דוגמה נוספת: $Tv = \lambda v$ צמודה לעצמה אם ורק אם $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\langle Tv, u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \langle v, \bar{\lambda} u \rangle$$

וכעת צריך $\bar{\lambda} = \lambda$, כלומר $\lambda \in \mathbb{R}$.

באופן אנאלוגי, מגדירים גם אנטי הרמיטיות, או אנטי סימטריות - כאשר מתקיים $T^* = -T$.

דוגמה - גזירה פעם אחת בדוגמה הקודמת, $Tv = \lambda v$ כאשר $\lambda \in i \cdot \mathbb{R}$ מדומה טהור.

טענה 0.4 נניח $T = T^*$. אם לכל v מתקיים $\langle Tv, v \rangle = 0$, אזי $T \equiv 0$.

הוכחה: יהיו $u, v \in V$ כלשהם. מהנתון על T מתקיים

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= 0 \\ \langle Tu, u \rangle &= 0 \\ \langle T(u+v), u+v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

נפתח את השוויון השלישי:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(u+v), u+v \rangle = \langle Tu + Tv, u+v \rangle = \cancel{\langle Tu, u \rangle} + \langle Tv, u \rangle + \cancel{\langle Tv, v \rangle} + \langle Tu, v \rangle = \\ &= \langle Tv, u \rangle + \langle u, T^*v \rangle = \langle Tv, u \rangle + \langle u, Tv \rangle \end{aligned}$$

כעת ניקח $u = Tv$, ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Tv, u \rangle + \langle u, Tv \rangle = \langle Tv, Tv \rangle + \langle Tv, Tv \rangle = 2 \|Tv\|^2 \\ &\Rightarrow Tv = 0 \Rightarrow T \equiv 0 \end{aligned}$$

■

מסקנה 0.5 נניח $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ותהי $T : V \rightarrow V$ כלשהי. אם $\langle Tv, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אזי $T \equiv 0$.

הוכחה: נשים לב שלכל T הטרנספורמציה $S = T + T^*$ צמודה לעצמה:

$$S^* = (T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = S$$

ונשים לב עתה כי לכל $v \in V$ מתקיים

$$\langle Sv, v \rangle = \langle (T + T^*)v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle + \langle T^*v, v \rangle = \cancel{\langle Tv, v \rangle} + \cancel{\langle v, Tv \rangle} = 0$$

לכן, מהטענה הקודמת, נקבל כי $S \equiv 0$, כלומר $T + T^* \equiv 0$. נשים לב כי הטרנספורמציה $R = T - T^*$ מאותו חישוב כמו קודם בדיוק, מקיימת גם $R \equiv 0$ לכל $v \in V$.

$$\langle Rv, v \rangle = 0$$

הבעיה היא שטרנספורמציה זו לא צמודה לעצמה:

$$R^* = (T - T^*)^* = T^* - T = -R$$

הטריק הוא להביט בטרנספורמציה $i \cdot R$. היא כן צמודה לעצמה, שכן לכל T ולכל סקלר λ מתקיים $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$. כשנפעיל זאת עבור $\lambda = i$, $T = R$, נקבל

$$(iR)^* = \bar{i} R^* = (-i)(-R) = iR$$

כמו כן, לכל $v \in V$ מתקיים $\langle iRv, v \rangle = i \langle Rv, v \rangle = 0$, ולכן מהטענה הקודמת מתקיים $iR \equiv 0$, ולכן $R \equiv 0$. בסך הכל קיבלנו

$$\begin{aligned} T + T^* &\equiv 0 \\ T - T^* &\equiv 0 \\ 2T &\equiv 0 \\ T &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

הערה 0.6 לא עובד מעל $\mathbb{R}$: נשים לב שטרנספורמציות הסיבוב בתשעים מעלות במרחב $V = \mathbb{R}^2$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית, לכל v מתקיים $Tv \perp v$. נשים לב גם שסיבוב בתשעים מעלות אינה צמודה לעצמה ולכן זו לא דוגמה נגדית לטענה הקודמת. הטרנספורמציה הזו למעשה מקיימת כי $T^* = T^{-1}$. על משפחה זו של טרנספורמציות נרחיב בהמשך.

משפט 0.7 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אזי $T = T^*$ אם ורק אם $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ לכל $v \in V$.

הוכחה: מצד אחד, אם $T = T^*$, אזי לכל $v \in V$ מתקיים

$$\overline{\langle Tv, v \rangle} = \overline{\langle v, T^*v \rangle} = \overline{\langle v, Tv \rangle} = \langle Tv, v \rangle \Rightarrow \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$$

מצד שני, נניח כי לכל $v \in V$ מתקיים $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$. נביט בטרנספורמציה $S = T - T^*$, ונראה להראות כי $S \equiv 0$. לפי המסקנה הקודמת מספיק להראות כי $\langle Sv, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$. ואכן, מתקיים

$$\langle Sv, v \rangle = \langle (T - T^*)v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle - \langle T^*v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} = 0$$

■ וזאת משום שהנחנו $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\langle Tv, v \rangle} = \langle Tv, v \rangle$

הגדרה 0.8 טרנספורמציה לינארית T צמודה לעצמה נקראת חיובית אם $\langle Tv, v \rangle > 0$ לכל $v \in V, v \neq 0$, ונקראת אי־שלילית אם $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ לכל $v \in V$.

דוגמה לכל טרנספורמציה לינארית T במרחב מכפלה פנימית, הטרנספורמציה $S = T^*T$ היא צמודה לעצמה ואי־שלילית. היא חיובית אם T הפיכה.

הוכחה: ראשית,

$$(T^*T)^* = T^* (T^*)^* = T^*T$$

ולכן היא אכן צמודה לעצמה. חיוביות:

$$\langle T^* (Tv), v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \geq 0$$

■ אם T חד־חד־ערכית, כלומר הפיכה, אזי $\|Tv\| > 0$ לכל $v \neq 0$.

טענה 0.9 תהי $T = T^*$. אזי כל ערך עצמי של T הינו ממשי. אם בנוסף T אי־שלילית/חיובית, אזי כל ערך עצמי הוא אי־שלילי/חיובי בהתאם.

הוכחה: נניח כי v ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ , כלומר $Tv = \lambda v$. מצד אחד הוכחנו כי $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ ומצד שני

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 \in \mathbb{R}$$

ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$. כמו כן, ברור שאם מניחים בנוסף כי T אי־שלילית/חיובית, אזי נובע מחישוב זה כי λ אי־שלילי/חיובי, בהתאמה. ■

הגדרה 0.10 יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ותהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נקראת צמודה לעצמה (הרמיטית מעל $\mathbb{C}$, סימטרית מעל $\mathbb{R}$) אם $A = A^*$.

טענה 0.11 תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ויהי $B = \{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V . תהי $A = [T]_B$. אזי מתקיים

$$T = T^* \iff A = A^*$$

הוכחה: הוכחנו כי $[T^*]_B = A^*$ (בזכות ההנחה כי B אורתונורמלי). תמיד מתקיים $[T]_B = [S]_B$ אם ורק אם $T = S$. נפעיל זאת עבור $S = T^*$ ונקבל

$$T = T^* \iff [T]_B = [T^*]_B \iff [T]_B = ([T]_B)^* \iff A = A^*$$

■

מסקנה מהטענה האחרונה היא שטרנספורמציה T_A צמודה לעצמה במרחב $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית $\iff A_A \iff$ צמודה לעצמה. זה נובע מהטענה שהראינו עכשיו עם הבסיס הסטנדרטי.

אם המושגים של אי-שליליות/חיוביות של A שצמודה לעצמה מגדירים באופן דומה לזה שעשונו לטרנספורמציות לינאריות. באופן פורמלי: A אי-שלילית/חיובית אם T_A היא כזו כטרנספורמציה לינארית על $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית. באופן מפורש, אם $A = A^*$, אזי אי-שליליות משמעה

$$\forall v \in \mathbb{F}^n \quad \langle Av, v \rangle \geq 0$$

וחיוביות משמעה

$$\forall 0 \neq v \in \mathbb{F}^n \quad \langle Av, v \rangle > 0$$

כאשר $\langle \cdot, \cdot \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

הערה 0.12 נשים לב שאם $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי A צמודה לעצמה $\iff A = A^t$ - סימטריה במובן הרגיל.

משפט 0.13 אם $A = A^*$ אזט כן הערכים העצמיים של A הם ממשיים (וכמובן שאי-שליליים או חיוביים תחת ההנחה המתאימה על A).

הוכחה: זו מסקנה מהדיון בטרנספורמציות לינאריות שצמודות לעצמן: ביחס לבסיס הסטנדרטי B , מתקיים $A = [T_A]_B$. הוכחנו (בעבר הרחוק) שלמטריצה A ולטרנספורמציה T_A יש את אותם ערכים עצמיים. עוד יודעים כי $A = A^*$, ולכן $T_A = T_A^*$. כעת, T_A צמודה לעצמה, ולכן יש לה רק ערכים עצמיים ממשיים, כפי שהוכחנו קודם. מכאן שגם הערכים העצמיים של A הם ממשיים. באותו אופן נובעת האי-שליליות/חיוביות של הערכים העצמיים. ■

מסקנה 0.14 הערכים העצמיים של מטריצה ממשית וסימטרית הם כולם ממשיים.