

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

17 באפריל 2016

משפט 0.1 שתי מטריצות $A, A' \in M_n(F)$ הן חופפות אם ורק אם הן מייצגות את אותה תבנית בי-לינארית ביחס לבסיסים שונים.

הוכחה: מצד אחד אם הן מייצגות את אותה תבנית, אזי הן הקשר ביניהן שראינו בשבוע שעבר הוא $A' = P^t A P$, כאשר P מטריצה הפיכה (מטריצת המעבר בין הבסיסים), ולכן הן חופפות. מצד שני, אם הן חופפות ניקח תבנית בי-לינארית $f \in B(V, V)$ כלשהי שמיוצגת על ידי A , ניקח בסיס חדש שמטריצת המעבר אליו היא המטריצה P המקשרת בין A, A' (שכן הן חופפות), על ידי לקיחת עמודות המטריצה P^{-1} . אזי מתוך המשפט שהוכחנו, ייצוג התבנית ביחס לבסיס החדש הוא על ידי המטריצה $P^t A P = A'$. ■

יחס החפיפה בין מטריצות הוא יחס שקילות:

$$1. A \sim A$$

$$2. A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$3. A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

דוגמה לייצוג תבנית על ידי מטריצה: ניקח $V = F^2$, ואת התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + uy$$

כעת, ביחס לבסיס הסטנדרטי,

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv - uy$$

המטריצה המייצגת היא

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

המשפט על שינוי המטריצה המייצגת במעבר בסיסים מאפשר להגדיר את הדרגה של תבנית בי-לינארית:

הגדרה 0.2 עבור $f \in B(V, W)$, מגדירים את הדרגה של f (מסומן $\text{rank} f$) להיות הדרגה של מטריצה המייצגת אותה.

המושג מוגדר היטב כי בבסיס אחר, המטריצה המייצגת תהי $A' = P^t A Q$, והמטריצות P, Q הפיכות, לכן $\text{rank} A = \text{rank} A'$.

דוגמה: בתבניות שראינו קודם בדוגמה, הדרגה של שתי התבניות היא 2.

טענה 0.3 אם A, A' חופפות אזי:

$$1. \text{rank} A = \text{rank} A'$$

$$2. \text{קיים } c \in F, c \neq 0 \text{ כך שמתקיים } \det A' = c^2 \det A$$

הוכחה: לפי סעיפים:

$$1. \text{ ברור (הסברנו לפני רגע).}$$

$$2. A' = P^t A P, \text{ ולכן}$$

$$\det A' = \det P^t \cdot \det A \cdot \det P = (\det P)^2 \cdot \det A$$

ומשום שהמטריצה P הפיכה מתקיים $c = \det P \neq 0$.

■

לדוגמה, אם $F = \mathbb{R}$, $\det A > 0$, וכן $\det A' < 0$, אזי הן בהכרח לא חופפות - כי לא יכול להיות קיים סקלר כפי שראינו בטענה. מעתה נתמקד במקרה בו $V = W$.

הגדרה 0.4 תבנית $f \in B(V, V)$ נקראת סימטרית אם $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$ לכל $v_1, v_2 \in V$.

הגדרה 0.5 תבנית $f \in B(V, V)$ נקראת אנטי-סימטרית אם $f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$ לכל $v_1, v_2 \in V$.

משפט 0.6 f סימטרית אם ורק אם $A = M(f)$ היא מטריצה סימטרית ביחס לאיזשהו בסיס של V . כנ"ל לגבי אנטי-סימטריות של f ושל המטריצה המייצגת.

הוכחה: אם f סימטרית אזי

$$a_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = a_{ji}$$

וקיבלנו את הסימטריה של המטריצה המייצגת. הוכחה זהה, עם מינוס, מוכיחה עבור אנטי-סימטריה.

בכיוון השני, נניח עכשיו שמטריצה מייצגת כלשהי A היא סימטרית. נזכור שהוכחנו כי מתקיים, אם A מייצגת ביחס לבסיס B ,

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= [v_1]_B^t A [v_2]_B \\ f(v_2, v_1) &= [v_2]_B^t A [v_1]_B \end{aligned}$$

כעת, משום ששחלוף של סקלר משיאר אותו כמו שהוא (מטריצה 1×1)

$$f(v_2, v_1) = \left([v_2]_B^t A [v_1]_B \right)^t = [v_1]_B^t A^t [v_2]_B$$

לכן, כאשר A סימטרית ($A = A^t$) נקבל שוויון וסימטריה של התבנית, וכאשר A אנטי-סימטרית ($A = -A^t$) נקבל שוויון עם היפוך סימן ואנטי-סימטריה של התבנית. ■

הגדרה 0.7 תהי f תבנית סימטרית על $V \times V$. מגדירים את התבנית הריבועית שמתאימה לתבנית f , שמסומנת Q_f , להיות

$$Q_f(v) = f(v, v)$$

דוגמה עבור התבנית הראשונה מהדוגמה של קודם, נקבל

$$Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2xy$$

עבור התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = ux + vy$$

נקבל

$$Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$

משפט 0.8 תהי f תבנית בי-לינארית סימטרית. אזי:

$$1. \quad 2f(v, w) = Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w)$$

2. אם $\text{char} F \neq 2$ (כלומר בשדה שלנו $1 + 1 \neq 0$) והתבנית f אינה תבנית האפס, אזי קיים $v \in V$ כך שמתקיים $Q_f(v) \neq 0$.

הוכחה: נחשב את אגף ימין של הסעיף הראשון:

$$\begin{aligned} Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w) &= f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w) = \\ &= f(v, v) + f(v, w) + f(w, v) + f(w, w) - f(v, v) - f(w, w) = \\ &= 2f(v, w) \end{aligned}$$

כעת נוכיח את 2: אם המציין אינו 2, אזי $2 \neq 0$, וניתן לחלק את השוויון מסעיף 1 בשתיים, ולקבל

$$f(v, w) = \frac{1}{2} (Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w))$$

לכן, אם $Q_f \equiv 0$ אזי נובע שהתבנית f הייתה חייבת להיות תבנית האפס, בסתירה לנתון שלנו. ■

דוגמה באותה תבנית מהדוגמה הראשונה, קיבלנו $Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2xy$. אם המציין של השדה הוא 2, נקבל $Q_f \equiv 0$, אבל התבנית הבי-לינארית אינה תבנית האפס, שכן למשל $f(e_1, e_2) = 1 \neq 0$.

משפט 0.9 נניח כי $\text{char} F \neq 2$ ותהי f תבנית סימטרית על V . אזי קיים בסיס של V שביחס אליו המטריצה המייצגת את f היא אלכסונית - כלומר קיים בסיס $\{v_i\} \subseteq V$ כך שמתקיים, לכל $i \neq j$,

$$f(v_i, v_j) = 0$$

נח לעבוד עם בסיס כזה כי אז אם ניקח

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n a_i v_i \\ w &= \sum_{j=1}^n b_j v_j \end{aligned}$$

ונחשב:

$$f(v, w) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \cdot f(v_i, v_i)$$

הוכחה: באינדוקציה על $\dim V$.

אם $\dim V = 1$, אין מה להוכיח. כעת נניח כי המשפט נכון עד מימד n , ונוכיח עבור $\dim V = n + 1$. אם f תבנית האפס אז כמובן שאין מה להוכיח (כי היא מיוצגת על ידי מטריצת האפס). אחרת, קיים מהמשפט הקודם וקטור $v_0 \in V$ כך שמתקיים

$$Q_f(v_0) = f(v_0, v_0) \neq 0$$

כעת נגדיר

$$U := \{u \in V \mid f(v_0, u) = 0\}$$

נראה שמתקיים $\dim U = \dim V - 1$. אכן, U הוא הגרעין של הפונקציונאל הלינארי $u \rightarrow f(v_0, u)$, וזהו פונקציונאל שאינו אפס, כיוון שהוא לא מתאפס עבור $u = v_0$. לכן, ממשפט המימדים נובע כי גרעין הפונקציונאל (שהוא בדיוק U) הוא ממימד $\dim V - 1$. כמו כן, ברור שמתקיים $U \cap \text{span}\{v_0\} = \{0\}$, מכך שמתקיים $f(v_0, v_0) \neq 0$. כעת, נצמצם את התבנית f לתת-המרחב U , ומהנחת האינדוקציה קיים בסיס של U שביחס אליו המטריצה המייצגת את f אלכסונית. כשנוסיף לבסיס זה את הווקטור v_0 נקבל את הבסיס הרצוי - $f(v_0, u_i) = 0$ לכל i משום שהם ווקטורים במרחב U . ■

מעל השדות $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ניתן "לשדרג" את המשפט:

משפט 0.10 לכל תבנית סימטרית מעל $\mathbb{C}$ קיימת מטריצה מייצגת A שהיא מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה: מהמשפט הקודם ניתן למצוא בסיס $\{v_i\}$ שביחס אליו המטריצה המייצגת היא

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $c_i \neq 0$ לכל i . כעת ניקח בסיס חדש, בו נחליף את v_i עבור $1 \leq i \leq k$, בווקטור $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$ (בשדה שלנו לכל סקלר יש שורש). כעת,

$$f(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = f\left(\frac{v_i}{\sqrt{c_i}}, \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}\right) = \frac{f(v_i, v_i)}{c_i} = 1$$

וכמוכן כאשר $i \neq j$

$$f(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = c \cdot f(v_i, v_j) = 0$$

■

משפט 0.11 מעל $\mathbb{C}$, לכל f סימטרית יש מטריצה מייצגת יחידה מהצורה שבמשפט הקודם.

הוכחה: קיום הוכחנו. היחידות נובעת מהסתבכלות על דרגת המטריצה המייצגת, שהיא דרגת התבנית. כלומר כמות האחדות במטריצה המייצגת היא נקבעת ביחידות לפי f . ■

מה קורה מעל $\mathbb{R}$? כאן נבצע בדיוק את אותו תהליך נירמול כמו קודם, רק שנחלק למקרים: עבור אותם v_i כך שמתקיים $f(v_i, v_i) > 0$, נוכל לנרמל כמו קודם ולקבל $f(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$; עבור אותם v_i כך שמתקיים $f(v_i, v_i) < 0$, נחלק בסקלר $\sqrt{-f(v_i, v_i)}$, כך שנקבל $f(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = -1$.

משפט 0.12 כל תבנית סימטרית מעל $\mathbb{R}$ ניתנת לייצוג על ידי מטריצה אלכסונית מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאן מתקבל שהגודל של בלוק האחדים, שנשמנו p , ועוד הגודל של בלוק המינוס אחדים, שנשמנו q , הוא המימד של f , כלומר $\text{rank } f = p + q$.

שאלה האם p, q עצמם נקבעים ביחידות על ידי f ?

משפט 0.13 (משפט ההתמדה של סילבסטר) הערכים p, q (שנקראים גם הסיגנטורה של f) נקבעים על ידי f , כלומר אם קיימת עוד מטריצה אלכסונית שמייצגת את f שבה יש r אחדים וכן s מינוס אחדים על האלכסון, אזי $p = r, q = s$.

הוכחה: נניח כי A מייצגת את f עם סיגנטורה (p, q) , וכן כי C מייצגת את אותה f עם סיגנטורה (r, s) . בלי הגבלת הכלליות, $r \leq p$. יהיו $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ איברי הבסיס שעליהם $f(v_i, v_i) = 1$ לפי המטריצה A . יהי $U = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$. $0 \neq u \in U$ כעת

$$f(u, u) = f\left(\sum_{i=1}^p a_i v_i, \sum_{i=1}^p a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^p a_i^2 f(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^p a_i^2 > 0$$

כעת נביט במרחב $W \subseteq V$ שנפרש על ידי כל הווקטורים w_i בבסיס שבו f מיוצגת על ידי המטריצה C שעבורם $f(w_i, w_i) = -1, 0$. עבור כל $w \in W$ נראה כי

$$f(w, w) = f\left(\sum a_i w_i, \sum a_i w_i\right) = \sum a_i^2 f(w_i, w_i) \leq 0$$

לסיים, נשים לב שאם מתקיים $r < p$, אזי $s > q$, ולכן

$$\dim W + \dim U = n - r + p > \dim V$$

לכן, $U \cap W \neq \{0\}$, וזו סתירה, כי אם $0 \neq v \in U \cap W$, אזי

$$v \in U \Rightarrow f(v, v) > 0$$

$$v \in W \Rightarrow f(v, v) \leq 0$$

■

לכן $p = r, q = s$.