

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

14 באפריל 2016

1 תבניות בי-לינאריות

הגדרה 1.1 יהיו V, W מרחבים ווקטוריים מעל שדה F . תבנית בי-לינארית על $V \times W$ היא העתקה $B : V \times W \rightarrow F$ שהיא לינארית בכל אחד מהרכיבים לחוד. כלומר, לכל $v_0 \in V$, $w \rightarrow B(v_0, w)$ הוא פונקציונאל לינארי על W , ולכל $w_0 \in W$, $v \rightarrow B(v, w_0)$ הוא פונקציונאל לינארי על V .

דוגמאות

1. $B(v, w) \equiv 0$ - תבנית האפס, כמובן בי-לינארית.

2. $V = W = \mathbb{R}^2$, וניקח $B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2xu + 5xv - 12yu$. הבדיקה

ישירה, ועוזר כאן לדעת מה שנראה מיד - באופן כללי, סכום של תבניות בי-לינאריות הוא גם כזה, ולכן מספיק לבדוק לכל מחובר לחוד. למשל, עבור

$$:B_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2xu$$

$$\begin{aligned} B_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= 2(x_1 + x_2)u = 2x_1u + 2x_2u = \\ &= B_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) + B_1\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

זה מוכיח אדיטיביות (שמירה על סכום) ברכיב הראשון.

עבור הומוגניות (שמירה על כפל בסקלר) ברכיב הראשון:

$$B_1\left(t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2(xt)u = t \cdot 2xu = t \cdot B_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

באופן דומה בודקים לינאריות ברכיב השני, וכן את לינאריות המרכיבים האחרים (כל זה ינבע בקרוב מתוצאות כלליות הרבה יותר).

הזכרנו את הטענה הקלה הבאה:

טענה 1.2 קבוצת התבניות הבי-לינאריות על $V \times W$ מהווה מרחב ווקטורי מעל F , כאשר

$$\begin{aligned} (tB)(v, w) &= t(B(v, w)) \\ (B_1 + B_2)(v, w) &= B_1(v, w) + B_2(v, w) \end{aligned}$$

זה נובע מתכונות בסיסיות של פונקציונאלים בי-לינאריים.

3. נניח כי $V = W = M_n(F)$ מרחבים ווקטוריים מעל F ביחס לסכום רגיל וכפל בסקלר של מטריצות. אזי

$$\begin{aligned} B(P, Q) &:= \operatorname{tr}(PQ) \\ B(P, Q) &:= \operatorname{tr}(PQ^t) \end{aligned}$$

הן תבניות בי-לינאריות.

הוכחה: עבור P_0 קבוע, $Q \rightarrow \operatorname{tr}(P_0 Q)$ הוא אדיטיבי על Q בגלל חוק הפילוג לכפל מטריצות, ואדיטיביות העקבה:

$$B(P_0, Q_1 + Q_2) = \operatorname{tr}(P_0(Q_1 + Q_2)) = \operatorname{tr}(P_0 Q_1) + \operatorname{tr}(P_0 Q_2) = B(P_0, Q_1) + B(P_0, Q_2)$$

וכן כמובן

$$B(P_0, tQ) = \operatorname{tr}(P_0 tQ) = \operatorname{tr}(tP_0 Q) = t \cdot \operatorname{tr}(P_0 Q) = t \cdot B(P_0, Q)$$

■ בדומה בודקים לינאריות ברכיב השני, ולפונקציונאל השני.

4. יהיו V, W מרחבים ווקטוריים מעל F , $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$. אזי

$$B(v, w) = \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

היא תבנית בי-לינארית. באופן כללי יותר ינבע שכל תבנית בי-לינארית היא צירוף לינארי של תבניות מסוג זה, כמו בדוגמה הראשונה.

5. חשוב: נסמן $\dim V = n, \dim W = m$, ותהי $A \in M_{n \times m}(F)$. נקבע בסיסים למרחבים B_V, B_W בהתאמה. אזי

$$B(v, w) = [v]_{B_V}^t A [w]_{B_W}$$

היא תבנית בי-לינארית. הבדיקה היא שוב ישירה, למשל עבור לינאריות על V :
לכל $w_0 \in W$

$$\begin{aligned} B(v_1 + v_2, w_0) &= [v_1 + v_2]_{B_V}^t \cdot A \cdot [w_0]_{B_W} = ([v_1]_{B_V}^t + [v_2]_{B_V}^t) \cdot A \cdot [w_0]_{B_W} = \\ &= [v_1]_{B_V}^t \cdot A \cdot [w_0]_{B_W} + [v_2]_{B_V}^t \cdot A \cdot [w_0]_{B_W} = B(v_1, w_0) + B(v_2, w_0) \end{aligned}$$

הערה 1.3 את ארבעת התכונות המגדירות תבנית בי-לינארית ניתן לסכם לכדי תכונה אחת:

$$\begin{aligned} (*) \quad B(av_1 + bv_2, cw_1 + dw_2) &= B(av_1, cw_1 + dw_2) + B(bv_2, cw_1 + dw_2) = \\ &= B(av_1, cw_1) + B(av_1, dw_2) + B(bv_2, cw_1) + B(bv_2, dw_2) = \\ &= acB(v_1, w_1) + adB(v_1, w_2) + bcB(v_2, w_1) + bdB(v_2, w_2) \quad (**) \end{aligned}$$

השוויון $(*) = (**)$ מסכים את ארבעת האקסיומות של בי-לינאריות. באופן כללי, חישוב דומה מראה את השוויון הבא לתבניות בי-לינאריות כלליות:

$$B\left(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j w_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j B(v_i, w_j)$$

הגדרה 1.4 יהיו V, W מרחבים ווקטוריים מעל שדה F , ויהיו $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ בסיס למרחב V , $B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W$ בסיס למרחב W . לכל תבנית בי-לינארית $B \in B(V, W)$ (הסימון $B(V, W)$ משמעו קבוצת כל התבניות הבי-לינאריות על $V \times W$), נגדיר את המטריצה המייצגת את B , $M(B) \in M_{n \times m}(F)$, באופן הבא:

$$A = M(B), A = (a_{ij}), a_{ij} = B(v_i, w_j)$$

משפט 1.5 אם $A = M(B)$ המטריצה המייצגת את התבנית B , עם הסימונים שבהגדרה הקודמת, אזי מתקיים

$$B(v, w) = [v]_{B_V}^t \cdot A \cdot [w]_{B_W}$$

הוכחה: יהיו $v \in V, w \in W$ ונסמן

$$\begin{aligned} v &= \sum x_i v_i \\ w &= \sum y_j w_j \end{aligned}$$

מתקיים

$$A = (a_{ij}), a_{ij} := B(v_i, w_j)$$

וכעת נחשב:

$$\begin{aligned} B(v, w) &= B\left(\sum x_i v_i, \sum y_j w_j\right) = \sum x_i y_j B(v_i, w_j) = \sum x_i y_j a_{ij} \\ [v]_{B_V}^t A [w]_{B_W} &= (x_1 \dots x_n) (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \sum x_i y_j a_{ij} \end{aligned}$$

וכך מתקבל השוויון הרצוי.

את הקשר בין תבניות ומטריצות מייצגות נסכם במשפט הבא:

משפט 1.6 נשמור את כל הסימונים מהמשפט הקודם למרחבים, לבסיסים ולמטריצה המייצגת. אזי ההעתקה $M : B(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(F)$ המתאימה לכל תבנית את המטריצה המייצגת אותה היא איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים - כלומר היא לינארית, חד-חד-ערכית ועל (הומומורפיזם שהוא מונומורפיזם ואפימורפיזם).

הוכחה: לינאריות ההתאמה M היא ברורה מהגדרת החיבור בשני המרחבים. מדוע ההתאמה על?

בהינתן מטריצה $A \in M_{n \times m}(F)$, נרצה למצוא תבנית $B \in B(V, W)$ שהמטריצה A מייצגת אותה. ניזכר בדוגמא החשובה שראינו קודם:

$$B(v, w) = [v]_{B_V}^t A [w]_{B_W}$$

הוכחנו כבר שתבנית זו היא בי-לינארית. יש רק לבדוק שמהטריצה המייצגת אותה היא אכן A . ואכן

$$B(v_i, w_j) = e_i^t \cdot A \cdot e_j = a_{ij}$$

ולכן $A = M(B)$, וההתאמה היא על. מדוע ההתאמה חד-חד-ערכית?

משום שאנחנו יודעים שהיא לינארית, מספיק להראות שהגרעין שלה טריוויאלי, כלומר יש להראות אם $M(B) = 0$ אזי $B = 0$. ואכן, אם $M(B) = 0$ אזי לכל זוג של איברי בסיס $v \in V, w \in W$ מתקיים $B(v, w) = 0$ ומלינאריות נובע שלכל $v \in V, w \in W$ מתקיים

$$B(v, w) = B\left(\sum x_i v_i, \sum y_j w_j\right) = \sum x_i y_j B(v_i, w_j) = 0$$

לכן סיימנו.

מסקנה 1.7 המרחב $B(V, W)$ הוא ממימד סופי, ומימדו $\dim V \cdot \dim W$.

הערה 1.8 זה מסביר הערה קודמת - כל תבנית בי-לינארית היא צירוף לינארי של תבניות מהסוג $\varphi(v) \cdot \psi(w)$, כאשר $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$.

משפט 1.9 יהיו V, W מרחבים ווקטוריים מעל F . יהיו $B, B' \subseteq V$ בסיסים של V , ויהיו $C, C' \subseteq W$ בסיסים של W . תהי $f \in B(V, W)$ תבנית בי-לינארית. תהי P מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס B' , ותהי Q מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס C' . תהי A המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים B, C , ותהי A' המטריצה שמייצגת את f ביחס לבסיסים B', C' . אזי מתקיים

$$A' = P^t A Q$$

הוכחה: מההנחות על P, Q מתקיים

$$\begin{aligned}\forall v \in V & \quad [v]_B = P[v]_{B'} \\ \forall w \in W & \quad [w]_C = Q[w]_{C'}\end{aligned}$$

אזי, ממשפט קודם:

$$f(u, v) = [v]_B^t A[w]_C = (P[v]_{B'})^t A(Q[w]_{C'}) = [v]_{B'}^t (P^t A Q)[w]_{C'}$$

משום שגם המטריצה A' מקיימת

$$f(u, v) = [v]_{B'} A'[w]_{C'}$$

נובע מהאיזומורפיזם בין מרחב התבניות והמטריצות המייצגות שמתקיים

$$A' = P^t A Q$$

■

בדיוק כמו במקרה של טרנספורמציות לינאריות, כאשר דנים בתבניות בילינאריות על $V \times V$, נהוג לעבוד עם אותו בסיס בשתי הקואורדינטות. במצב זה, המשפט הקודם אומר שבמעבר מבסיס B לבסיס C של המרחב הווקטורי V המטריצה המייצגת A עוברת למטריצה $A' = P^t A P$. זה מוביל למושג מקביל למושג החשוב של חפיפת מטריצות:

הגדרה 1.10 שתי מטריצות A, C נקראות חופפות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים $A = P^t C P$.

זהו למעשה יחס שקילות על מטריצות.