

טענות באלגברה לינארית 2 א

ערכים עצמיים:

- אם $\lambda \in F$ ע"ע של T אז לכול פולינום q מתקיים $q(\lambda)$ ע"ע של $q(T)$.
- עבור T מעל מרחב ממימד n קיים פולינום מדרגה לכול היותר n^2 ש T מאפסת אותו.
- הפולינום המינימלי של העתקה T יחיד עד כדי כפל בסקלר (נובע מאוקלידס)
- הע"ע הם שורשים של הפולינום המינימלי!
- להעתקות דומות יש אותו הפולינום המינימלי.
- ו"ע של ע"ע שונים הם בלתי תלויים לינארית. לכן להעתקה יש לכול היותר n ע"ע שונים, ואם יש לה n אז יש בסיס של ו"ע ולכן היא לכסינה.
- λ ע"ע אמ"מ ההעתקה $\lambda I - T$ אינה הפיכה, כלומר יש וקטור בגרעין שלה אמ"מ $\det(\lambda I - T) = 0$ ולכן השורשים מעל השדה של $\det(xI - T)$ הם הע"ע של T .
- קילי המילטון: T היא שורש של הפולינום האופייני שלה (לקרוא הוכחה.. לא ברור). ולכן הפולינום המינימלי מחלק הפולינום האופייני (כי הוא מחלק כול פולינום ש T מאפסת אותו, מחלוקה בשארית). הוכחה על ידי לקיחת המטריצה המצורפת של $(xI - T)$ ולהבין שהיא למעשה סכום של מטריצות כפול מקדמים של איקס, והמשפט שאומר $\text{adj}(A) * A = \det A * I$.
- $\Delta_A(x) | (m_A(x))^n$ כאשר n הוא סדר המטריצה A . ולכן יש להם אותם גורמים אי פריקים.
- הריבוי האלגברי (החזקה בפולינום האופייני) של ע"ע גדול מהריבוי הגאומטרי (מימד המרחב העצמי). נובע מחישוב דטרמיננטה.

פולינומים:

- $\deg(p(x) * q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$
- לכול שני פולינומים $f(x), g(x)$ קיימים פולינומים a, b כך ש $a(x)f(x) + b(x)g(x) = \gcd(f, g)$. נובע מכך שזה אידאל שהgcd הוא היוצר שלו.
- אייזנשטיין: עבור פולינום שקיים ראשוני שמחלק את כול מקדמיו מלבד האחרון, ולא מחלק את הראשון פעמיים, הפולינום הזה אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.
- הפולינום המינימלי של מטריצת בלוקים הינו lcm של הפולינומים המינימליים של כול בלוק בנפרד.
- הפולינום האופייני של מטריצת בלוקים משולשית הוא מכפלת הפולינומים האופייניים של הבלוקים על האלכסון.
- עבור פולינום עם מקדמים שלמים, השורשים הרציונליים (המצומצמים) שלו $\frac{p}{q}$ מקיימים $p|a_0 ; q|a_n$
- אם $\gcd(f, g) = 1$ אז $af + bg = 1$
- אם $\gcd(f, g) = 1$ ו $g(A) = 0$ אז $f(A)$ מטריצה הפיכה, וההופכית שלה פולינום ב A . יתר על כן $f(A)$ הפיכה אמ"מ $\gcd(f, m_A) = 1$. ולכן לכול פולינום p הזר ל $m_A(x)$ מתקיים כי $\ker(p(A)) = \{0\}$
- אם $d = \gcd(p(x), m_A(x))$ אז $\ker d(A) = \ker p(A)$ (מוכיחים אם העבודה שניתן לכתוב סכום שני פולינומים שיצא gcd). ולכן את הפירוק הפרימרי ניתן לעשות מהפולינום האופייני ולא חייבים המינימלי!!

מרחבי מנה:

- $u + W = v + W \leftrightarrow u - v \in W$
- $v + W = u + W \text{ XOR } v + W \cap u + W = \phi$
- $\dim V = \dim W + \dim V/W$ ולכן מרחב המנה איזומורפי למשלים של W .
- אם T מאפסת את פולינום q אז ההעתקה המושרתת במרחב המנה גם כן מאפסת את q .

צורות קנוניות:

- A לכסינה אמ"מ יש למרחב בסיס של ו"ע שלה.
- A לכסינה אמ"מ הפולינום המינמלי שלה מתפרק לגורמים לינארים שונים. נובע ממשפט הפירוק היסודי. ובאופן טריוויאלי לחלוטין A לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינארים והריבוי הגיאומטרי של כול ע"ע שווה לריבוי האלגברי שלו.
- שילוש: אם כול הע"ע של מטריצה בשדה אז היא ניתנת לשילוש, בעזרת לקיחת מרחב עצמי של ו"ע יחיד והשלמה עם מרחב המנה. (בפרט כול מטריצה ניתנת לשילוש מעל המרוכבים). או במילים אחרות מוצאים וקטור עצמי, משלימים לבסיס, מכפילים, מקבלים מטריצה משולשת בפינה השמאלית העליונה וממשיכים עבור המטריצה ממימד אחד פחות.
- נילפוטנטיות: להעתקה נילפוטנטית עם אינדקס K יש בסיס שבו היא בלוקים שכול בלוק הינו בלוק ג'ורדן לע"ע אפס וגודל הבלוק הראשון הוא K , שאר הבלוקים קטנים ממנו (ניתן לסדר אותם בסדר יורד) ומספר הבלוקים זה הריבוי הגאומטרי של אפס. גדלי הבלוקים נקראים אינווריאנטים של ההעתקה ושתי העתקות נילפוטנטיות דומות אמ"מ יש להן אותם אינווריאנטים. במילים אחרות העתקה נילפוטנטית משרה פירוק של המרחב לתתי מרחבים ציקלים. כדי למצוא הצורה הקנונית פשוט בוחרים וקטור שאינו בגרעין ומגלגלים אותו לקבלת תת מרחב ציקלי. לתת המרחב הזה מוצאים משלים וממשיכים בתהליך.
- משפט הפירוק היסודי: העתקה T משרה פירוק של המרחב לסכום ישר של מרחבים T אינו' כאשר כול תת מרחב כזה הוא הגרעין של גורם אי פריק אחר של הפולינום המינמלי שלה (כולל החזקה שבה הוא מופיע) ועבור כול תת מרחב כזה הפולינום המינמלי של T מצומצמת עליו הוא בדיוק הגורם האי פריק שיצר אותו (בחזקה המתאימה).
- משפט פירוק ג'ורדן: עבור העתקה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים, כלומר בעלי חזקות) אז יש בסיס שבו ההעתקה היא מצורת ג'ורדן, שזו מטריצת בלוקים על האלכסון, כך שלכול ע"ע יש בלוק משלו מגודל הריבוי האלגברי שלו. כול בלוק כזה מורכב מתתי בלוקים, שהגודל מביניהם הוא בגודל החזקה של הרכיב הלינארי בפולינום המינמלי שממנו נובע הע"ע שאליו הבלוק שייך. מספר תתי הבלוקים לכול ערך עצמי הוא כריבוי הגאומטרי של הע"ע הנ"ל. וכול תת בלוק כזה הוא הע"ע על האלכסון ואחדים מעל האלכסון הראשי. שתי מטריצות דומות אמ"מ יש להן אותה צורת ג'ורדן.
- צורה קנונית רציונלית: (שימושי כאשר אי אפשר לג'ורדן, כלומר לא כול הע"ע בשדה). נבחר וקטור v כלשהו שונה מאפס במרחב ונפעיל עליו את T עד אשר נקבל קבוצה תלויה לינארית (מימד סופי...) נקח את כול הוקטורים עד אז, זו קבוצה בלתי תלויה והיא פורשת את המרחב הציקלי של T ו v שהוא בברור T אינו'. המטריצה המייצגת את T מצומצמת על תת המרחב הזה היא אפסים על האלכסון, אחדים בלאכסון (התחתון) (ברור, כי כול וקטור נשלח לבא בתור בבסיס) ובעמודה האחרונה בדיוק הפולינום שמייצג את התלות הלינארית בין הקבוצה הזו לוקטור שהתקבל מלהפעיל את T שוב. (אבל הפולינום בסימן מינוס מהעברת אגפים). הפולינום הזה הוא בדיוק הפולינום המינמלי של ההעתקה מצומצמת על המרחב הציקלי.
- משפט הפירוק למשולשית תחתונה ואוניטרית: עבור מטריצה B הפיכה מעל C קיימת ויחידה מטריצה משולשית תחתונה M כך שאיברי האלכסון שלה חיוביים (ממש) ומתקיים MB אוניטרית. ברור כי M הפיכה וגם ההופכית שלה משולשית תחתונה עם איברים חיוביים על האלכסון ולכן

לכול מטריצה הפיכה מתקיים $B = m^{-1}U$ כאשר U אוניטרית ו m^{-1} משולשית תחתונה עם אלכסון חיובי. ההוכחה פשוטה מתהליך גראם שמידט. משום ש B הפיכה שורותיה הן בסיס למרחב, נייצר מהן בסיס אורתונורמלי, זו תהיה המטריצה האוניטרית, והמטריצה המשולשית תחתונה תהיה המקדמים שמתקבלים מגראם שמידט.

- **משפט הפירוק הספקטרלי:** העתקה לכסינה כך ש $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הם כול הע"ע השונים שלה משרה הטלות על המרחב כך ש $E_i^2 = E_i, E_i E_j = 0, I = \sum_{i=1}^k E_i, T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_k E_k$ וכול אחת מההעתקות היא ההטלה על המרחב העצמי המתאים. כמו כן זה נכון גם בכיוון ההפוך. אם קיימים סקאלרים והטלות שמקיימות הנל אז T לכסינה ואלו בדיוק הע"ע שלה. כמו כן בעזרת פולינומי לגראנג' והע"ע ניתן לשחזר את ההטלות הללו. בפרט עבור ההעתקה נורמלית או סימטרית מעל הממשיים נובע כי המרחבים השונים מאונכים זה לזה.
- **משפט הפירוק הפולארי:** עבור העתקה T קיימים U אוניטרי ו $N \geq 0$ כך ש $T = UN$ ו N יחידה ואם T הפיכה אז גם U יחידה. נובע מהסתכלות על T^*T שהיא העתקה אי שלילית ולקחת שורש עבודה. השורש יהיה המטריצה האי שלילית, ואם T הפיכה אז השורש גם כן הפיך. המטריצה היוניטרית תהיה T כפול ההופכי של השורש.

מרחבים אינווריאנטים סכומים ישרים ומרחבים עצמיים:

- עבור $V_1 \dots V_k$ תתי מרחבים של V מתקיים שהנ"ל שקול: (סכום ישר)
 - לכול קבוצה של וקטורים כך שכול אחד שייך לתת מרחב אחר, הקבוצה ב"ת.
 - אם ניקח בסיס לכול תת מרחב בנפרד, האיחוד שלהם הינו בסיס ל V (ואין איבר שמופיע פעמיים באיחוד)
 - מימד הסכום שלהם הוא סכום המימדים שלהם.
- המרחבים העצמיים של העתקה T מהווים סכום ישר (לא בהכרח של כול המרחב!) וזאת משום ש א' לעיל מתקיים.
- $\dim(\ker(ST)) \leq \dim(\ker(S)) + \dim(\ker(T))$
- אם W תת מרחב T אינו' ממימד אחד אז הוא בהכרח חלקי למרחב עצמי כלשהו.
- אם W מרחב T אינו' אז W גם $f(T)$ אינו' לכול $f \in F[x]$
- $m_{T|_W} | m_T$ עבור W אינו'.
- עבור T העתקה ו $f(x) = g(x) * h(x)$ כך ש $f(T) = 0$ וגם $\gcd(h, g) = 1$ אז מתקיים $V = \ker(g(T)) \oplus \ker(h(T))$ ובפרט אם m_T מתפרק לשני גורמים אי פריקים זרים אז הפולינומים המינמלים של מרחבי גרעיני הגורמים האי פריקים האלה הם בדיוק הגורמים האי פריקים. או במילים אחרות הפולינום המינמלי של T זה מכפלת הפולינומים המינמלים של T מצומצמת על גרעין $g(T)$ ו $h(T)$ מצומצמת על גרעין $h(T)$ כאשר $f = g * h$.
- מרחב ציקלי עבור וקטור v והעתקה T $z(v, T)$ מקיים שהוא שווה לחיתוך כול המרחבים ה T אינו' שמכילים את v . כמו כן $z(v, T) = \{f(T)v : f(x) \in F[x]\}$
- עבור העתקה T כך ש $m_T(x) = q(x)^n$ ו $\deg(q) = d$ מתקיים כי $\{v, Tv, \dots, T^{dn-1}v\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. (כי אחרת היה צירוף שלהם שנותן אפס בסתירה למינמליות של הפולינום המינמלי...) (בצמצום למרחב הציקלי הנ"ל)
- עבור העתקה T ותת מרחב W אינו' אזי $W = \bigoplus V_i \cap W$ כאשר V_i זה הפירוק הפרימרי. (זה לא נכון עבור כול V_i שמהווים סכום ישר של V). ובפרט אם T לכסינה אז כול מרחב T אינווריאנטי הוא סכום ישר של תתי מרחבים עצמיים.

מכפלה פנימית:

טריק שימושי: אם רוצים להוכיח שוויון של דברים נראה שעבור כול וקטור v המכפלה של אחד ב v שווה למכפלה של השני ב v ואז מלינאריות נקבל שהמכפלה של v בהפרש שלהם היא אפס, ובפרט נציב v שווה להפרש ונקבל שההפרש הוא אפס.

הגדרות:

- העתקה אוניטרית T היא העתקה שמקיימת $\langle Tv, Tu \rangle = \langle v, u \rangle$ לכל שני וקטורים. (בפרט משמרת נורמה). (מעלה השדה C)
- מטריצה A תקרא אוניטרית אם $AA^* = I$ כאשר הצמוד ההרמיטי מוגדר להיות בארטרנזפוז, בפרט מטריצה אוניטרית אמ"מ שורותיה/עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי למרחב C^n ביחס למכפלה הסטנדרטית. (נכון גם מעל R).
- העתקה אורתוגונלית T מקיימת $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל שני וקטורים מעל R
- מטריצה A תקרא אורתוגונלית אם $A^T A = I$ מעל הממשיים.
- העתקה תקרא צמודה לעצמה/הרמיטית, אם $T = T^*$ מעל המרוכבים.
- העתקה תקרא נורמלית אם $TT^* = T^*T$ בפרט העתקות אוניטריות והעתקות צמודות לעצמן הן נורמליות.

טענות:

- $W \oplus W^\perp = V$ כלומר מרחב והמשלים האורתוגנלי שלו הם סכום ישר לכל המרחב.
- קבוצה אורתוגונלית היא בלתי תלויה לינארית (נובע מלהכפיל הצ"ל הכול אחד מהוקטורים).
- אם $\langle Tv, v \rangle = 0$ לכל וקטור $v \in V$ אז T העתקה האפס (רק מעל המרוכבים!!!) בהוכחה משתמשים בהצבת וקטור כפול i . יש דוגמאות שזה לא נכון מעל R מציבים סכום וקטורים במכפלה הפנימית, ואז מחליפים אחד בוקטור כלשהו כפול כדי לקבל שגם הסכום וגם ההפרש הם אפס...
- לכל העתקה T ווקטור v קיים יחיד וקטור w כך שם לכול וקטור u $\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle$ כלומר לכול וקטור להפעיל עליו את T ואז לכפול ב v זה כמו ישר לכפול ב w . ההוכחה קונסטרוקטיבית. בונים את w להיות בדיוק צירוף לינארי של המכפלות של T מופעל על איברי בסיס אורתונורמלי (עם צמוד).
- הפונקציה שלכול וקטור v תתאים את w שיקים את לעיל ביחס ל T נקראת הצמוד ההרמיטי של T ומסומנת T^* . כלומר זו הפונקציה שלכול וקטור v תחזיר וקטור T^*v כך שלכול וקטור אחר u להפעיל את T על u ואז לכפול ב v זה כמו ישר לכפול ב T^*v ולכן $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$. פונקציה זו היא העתקה לינארית. נשים לב שהצמוד ההרמיטי קיים גם מעל C וגם מעל R .
- עבור העתקה T ובסיס **אורתונורמלי** e מתקיים $[T]_e = A$ אז $[T^*]_e$ שווה ל A^T צמוד טרנזפוז. הוכחה פשוטה מפרישה לפי הבסיס ושימוש במכפלה הפנימית ובאורתונורמליות.
- $T^*T v = 0 \rightarrow T v = 0$
- $(\ker T)^+ = \text{Im } T^* \mid \ker T^* = (\text{Im } T)^+$ נובע ישירות מהגדרה.
- עבור T העתקה ו B בסיס למרחב מתקיים: $\langle T(b_i), b_j \rangle_{i,j} = \Gamma(b_1, \dots, b_n) \overline{[T^*]_B^B}$

העתקות אוניטריות: (נשים לב שזו חבורה סגורה לכל ולחופכי)

- אם $\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle$ לכל וקטור אז T אוניטרית. (עבור מרוכבים זה אותה הוכחה כמו לעיל, עבור ממשיים משתמשים בזה שמכפלה פנימית סימטרית).

- העתקה T אוניטרית אמ"מ היא מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. הוכחה פשוטה מהגדרה ומהעובדה שקבוצה אורתונורמלית היא בלתי תלויה לינארית. (פורשים לפי בסיס אחד, ואז לפי בסיס שני...)
- העתקה T אוניטרית אמ"מ $T^*T = I$. ולכן אם T אוניטרית $T^* = T^{-1}$.
- העתקה T אוניטרית אמ"מ שורות/עמודות המטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו הן בסיס אורתונורמלי למרחב C^n והמכפלה הפנימית הסטנדרטית. (נכון גם מעל R)
- עבור T אוניטרית מתקיים לכול λ $|\lambda| = 1$. נובע מכך ש T בפרט נורמלית ולכן $T^*T = TT^*$ של T הם גם של הצמוד ההרמיטי שלה אבל בבאר, ושהיא כפול הצמוד שלה זה הזהות.

העתקות אורתוגונליות (שזה למעשה אוניטריות מעל R כלומר $T^* = T^{-1}$)

- נזכר שמטריצות אורתונורמליות (כלומר מעל C) ניתן ללכסן. אולם מטריצות אורתוגונליות ניתן לדמות אורתוגונליות למטריצה שיש לה בלוק שהוא היחידה, בלוק שהוא מינוס היחידה ועוד בלוקים של מטריצות סיבוב בכול מיני זוויות, כול עוד אנחנו רוצים לעבוד מעל R .

העתקות צמודות לעצמן:

- אם $S = S^*$ ומדברים מעל הממשיים אז אם $\langle Su, u \rangle = 0$ לכול u אז $S = 0$. מוכיחים עם להציב סכום של שני וקטורים כלשהם, ולהשתמש בסימטריות כי היא צמודה לעצמה. נזכר שאם היינו מעל המרוכבים אז לא צריך את העובדה ש S צמודה לעצמה.
- עבור העתקה צמודה לעצמה כול λ $|\lambda| = 1$ של T ממשיים. נובע מהגדרה, והעובדה שהנורמה של T שונה מאפס.
- העתקה T צמודה לעצמה מעל המרוכבים אמ"מ $\langle Tv, v \rangle \in R$ לכול v .
- עבור T צמודה לעצמה $T^k v = 0 \rightarrow Tv = 0$. מוכיחים ל T בחזקת כול חזקה של שתיים, באינדוקציה על ידי ירידה בחזקה אחת ושימוש בטענה שאם $SS^*v = 0$ אז $Sv = 0$.
- אם נסתכל **מעל R** אז כול העתקה צמודה לעצמה היא בפרט סימטרית ומתקיים שהיא ניתנת ללכסון אורתונורמלי **מעל R** כמו העתקה נורמלית (אותה ההוכחה תקפה, כי כול הע"ע הם ממשיים ולכן הפירוק היסודי הוא לגורמים לינארים).

העתקות נורמליות:

- אם N נורמלית $Nv = 0$ אז $N^*v = 0$. מיידי מתכונות מכפלה פנימית וכוכב.
- אם N נורמלית ומתקיים $Nv = \lambda v$ אז מתקיים עבור אותו הוקטור $\bar{\lambda} v = N^*v$. נובע מהעובדה ש $N - \lambda I$ נורמלית והטענה לעיל.
- אם N נורמלית $N^k v = 0$ אז $Nv = 0$. נגדיר $S = N^*N$, צמודה לעצמה ולכן זה מתקיים.
- עבור העתקות נורמליות, וקטורים עצמיים של T שונים הם אורתוגונלים. נובע מכך שעבור העתקה נורמלית הע"ע העצמים שלה בבאר הם הע"ע של הצמוד ההרמיטי שלה.
- להעתקה N נורמלית מעל V מ"ו **מעל C** יש בסיס אורתונורמלי שבו היא אלכסונית. כלומר קיימת U אוניטרית כך ש $U^{-1}NU = D$ כאשר D אלכסונית. ובפרט $U^*NU = D$. כמו כן אם העתקה ניתנת ללכסון אוניטרי אז היא נורמלית. (כלומר העתקה היא נורמלית אמ"מ יש בסיס אורתונורמלי של V של T). הוכחה: כיוון אחד קל, נובע מתכונות הכוכב והעובדה שאלכסוניות מתחלפות בכפל. כיוון שני נובע ממשפט הפירוק היסודי, מעל C הפולינום המינימלי הוא גורמים לינארים. לכול אחד ממרחבי הגרעינים שהפירוק משרה לע"ע כלשהו מתקיים שכול וקטור במרחב הזה הוא גם וקטור עצמי, מטענה שהוכחנו על נורמלית בחזקה כלשהי. בנוסף משום ש"ע של T שונים של נורמלית מאונכים, נמצא בסיס אורתו לכל תת מרחב, נאחד וקיבלנו בסיס אורתו של V לכול המרחב.

- אם N נורמלית מעל המרוכבים אז N^* היא פולינום ב N וזה נובע מהעובדה שלכול מטריצה אלכסונית הכוכב שלה הוא פולינום בה.

העתקות חיוביות/אי שליליות:

הגדרה: עבור העתקה T צמודה לעצמה נאמר ש T חיובית אם $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ ונאמר אי שלילית אם $\langle Tv, v \rangle \leq 0$ (בפרט משום שהיא צמודה לעצמה כולם ממשיים ולכן יש טעם לדבר על חיוביות).

- העתקה צמודה לעצמה היא אי שלילית/חיובית אם "מ"מ כול הע"ע שלה אי שלילי/חיוביים.
- $T \geq 0 \Leftrightarrow T = A^*A$. כיוון אחד פשוט מהגדרה, כיוון שני מהעובדה שצמודה לעצמה ניתנת ללכסון אורתוגונלי, והאלכסונית שמתקבלת בעלת איברים חיוביים על האלכסון לכן יש לה שורש.
- בהנתן העתקה T אי שלילית קיימת יחידה העתקה N אי שלילית שתקרא השורש של T ומתקיים $T = N^2$. העתקה אי שלילית ניתן ללכסון אורתוגונלי $T = U^*DU$ נגדיר $A = U\sqrt{D}$ ולכן A אי שלילית, צמודה לעצמה ומתקיים $A^2 = T$. יחידות נובעת מיחידות הפירוק הספקטרלי. הבנת הפירוק הספקטרלי זה פשוט מאוד למצוא את השורש.
- עבור שתי העתקות חיוביות מעל R קיימת מטריצה אחת הפיכה שחופפת אחת מהן לזהות ואת השנייה למטריצה אלכסונית. כי אם $A > 0, B = B^*$ אז מתקיים $P^TAP = I$ עבור p כלשהו כי נלכסן אורתונורמלית ואז נדרג, כי כולם חיוביים. ולכן P^TBP גם כן צמודה לעצמה ולכן לכסינה, לכן $Q^TP^TBPQ = D$ ולכן זה הבסיס המלכסן.
- התנאים הבאים שקולים, עבור L העתקה כלשהי מעל C : (הכול קל חוץ מג' שזה נובע מכך שאם הם חיוביים אז בפרט ממשים לכן היא צמודה לעצמה, בפרט נורמלית, לכן ניתנת ללכסון וכל הע"ע שלה אי שלילי, לכן אפשר לקחת להם שורש ולקבל מטריצה אלכסונית של שורשי הע"ע שהיא צמודה לעצמה כי היא אלכסונית וממשית).

$$\begin{aligned} T = T^* \text{ כאשר } L = T^2 & \quad \circ \\ L = SS^* & \quad \circ \\ \langle Lv, v \rangle \geq 0 \text{ לכול } v & \quad \circ \end{aligned}$$

היטלים:

הגדרה: עבור $V = W_1 \oplus W_2$ לכול וקטור $v \in V$ ניתן לכתוב אותו בצורה יחידה כ $v = w_1 + w_2$ כאשר $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ וההיטלים מוגדרים להיות $E_1(v) = w_1; E_2(v) = w_2$.

תכונות: עבור E_1, E_2 היטלים

$$\begin{aligned} E_1^2 &= E_1 & \bullet \\ E_1E_2 &= 0 = E_2E_1 & \bullet \\ E_1 + E_2 &= I_V & \bullet \\ \text{Ker}E_1 &= W_2 & \bullet \\ \text{Ker}E_2 &= W_1 & \bullet \\ \text{Im}E_1 &= W_1 & \bullet \\ \text{Im}E_2 &= W_2 & \bullet \end{aligned}$$

טענות:

- עבור העתקה $T = T^2$ מתקיים כי $V = \text{Ker}T \oplus \text{Im}T$ הטלה על התמונה שלה.
- הטלה מצומצמת על המרחב שהיא מטילה עליו מתנהגת כמו הזהות.
- פירוק של מרחב לתתי מרחבים כסכום ישר משרה הטלות, ולהפך הטלות שסכומן הוא הזהות על המרחב והן זרות משרות פירוק לתתי מרחבים המהווים סכום ישר.

- אם מרחב מתפרק לתתי מרחבים שהם סכום ישר, אז כול תת מרחב כזה הוא T אינו T אמ"מ
- מתחלפת עם ההטלה על תת המרחב הזה.
- עבור T הטלה מתקיים $T = T^* \leftrightarrow \ker T \perp \operatorname{Im} T$

תבניות בי-לינאריות:

הגדרה: תבנית בי לינארית מעל מרחב וקטורי היא פונקציה $V \times V \rightarrow F$ שהיא לינארית בשני הארגומנטים. $L(V, F)$ אוסף כול התבניות הבי לינאריות מעל V מעל שדה F . $L(V, F)$ הוא מרחב וקטורי איזומורפי למרחב המטריצות $n \times n$ כאשר n הוא מימד המרחב.

- תבנית בי לינארית מוגדרת באופן חד חד ערכי על ידי מטריצה המייצגת אותה בבסיס מסוים, המטריצה הזו היא פשוט הפעלה הפונקציה על כול צמד מאיברי הבסיס. כאשר עוברים בין הבסיסים המטריצה המייצגת משתנה על ידי הכפלה משני הצדדים במטריצה הפיכה, מטריצת מעבר הבסיסים, מצד אחד כמו שהיא ומצד שני היא בטרנזפוז.
- **הגדרה:** שתי מטריצות A, B יקראו חופפות אם קיימת מטריצה הפיכה p כך ש $p^T A p = B$
- מטריצות המייצגות את אותה תבנית בי לינארית בבסיסים שונים יהיו חופפות.
- **הגדרה:** תבנית תיקרא לא מנוונת אם $\deg A = n$ כאשר A מייצגת אותה בבסיס כלשהו.
- תבנית בי לינארית היא לא מנוונת אמ"מ לכול $u \in V$ שונה מאפס קיים $v \in V$ כך ש $f(u, v) \neq 0$ אמ"מ לכול $v \in V$ שונה מאפס קיים $u \in V$ כך ש $f(u, v) \neq 0$. נובע מהעובדה שאם המטריצה המייצגת הפיכה אז היא חח"ע ועל ולכול וקטור שונה מאפס קיים וקטור שכופל אותו והתוצאה עדיין לא אפס.
- **הגדרה:** תבנית בי לינארית סימטרית אם $f(u, v) = f(v, u)$ לכול v, u .
 - F סימטרית אמ"מ המטריצה המייצגת אותה סימטרית בבסיס כלשהו.
 - **משפט:** לתבנית בי לינארית סימטרית מעל הממשיים קיים בסיס שבו היא מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית. נובע מכך שמטריצה סימטרית ממטית נית ללכסון אורתוגונלי, וההופכי של מטריצה אורתוגונלית הוא הטרנזפוז שלה ולכן יש חפיפה ולא רק דמיון.
 - **משפט:** לתבנית בי לינארית סימטרית (לא בהכרח לא מנוונת) מעל המרוכבים, אם יש בסיס שבו היא אלכסונית אז יש בסיס שבו היא בלוק הזהות ואז אפסים. נובע מנרמול הבסיס שבו היא אלכסונית ושלכול מספר מרוכב יש שורש.
 - **משפט:** לכול תבנית בי לינארית סימטרית מעל הממשיים יש בסיס שבו היא מיוצגת על ידי מטריצת בלוקים של בלוק הזהות, בלוק הזהות במינוס ובלוק אפסים, וגדלי הבלוקים לא תלויים בבחירת הבסיס. גדלי הבלוקים נקראים הסיגנטורה של ההעתקה.
 - **אלגוריתם לחפיפת סימטרית לאלכסונית מעל C :** (מעל R זה נובע מכך שהיא צמודה לעצמה ולכן יש לכסון אורתוגונלי שהוא בפרט חפיפה). כול מטריצה סימטרית מעל C ניתן לחפוף למטריצה אלכסונית על ידי דירוג (פעולות אלמנטריות) על העמודות והשורות. מבצעים אותן הפעולות על העמודות כמו שעל השורות, ותתקבל מטריצה אלכסונית כי המקורית סימטרית. כמו כן פעולות אלמנטריות על השורות זה הכפלה משמאל, ופעולות אלמנטריות על העמודות זה הכפלה מימין בטרנזפוז ולכן בכול שלב לאחר הדירוג עדיין תהיה בידנו מטריצה סימטרית.
- **הגדרה:** תבניות אנטי סימטריות: f תקרא אנטי סימטרית אם $f(u, v) = -f(v, u)$. נשים לב שכול תבנית בי לינארית היא סכום של סימטרית ואנטי סימטרית, ממש כמו מטריצות.
 - לכול תבנית אנטי סימטרית יש בסיס שבו היא מיוצגת על ידי מטריצת בלוקים שכול בלוק הוא מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ולאחר מכן הרבה אפסים. ובפרט הדרגה של התבנית זוגית, כי מספר הבלוקים האלה הוא כמחצית הדרגה. הוכחה על ידי הסתכלות על שני וקטורים f מופעלת עליהם שונה מאפס, בהכרח הם בת"ל. הם פורשים מרחב מימד 2 שעל ידי נרמול המטריצה המייצגת את התבנית במרחב הזה היא בדיוק מהצורה הרצויה.

מסתכלים על כול הוקטורים שהתבנית תיתן אפס עליהם ווקטור מתוך המרחב הנ"ל, זה מרחב משלים ואז ממשיכים באינדוקציה.

מיון שניוניות:

- הגדרה: שניונית זה פולינום ריבועי בשני משתנים כאשר לפחות אחד מהמקדמים של x^2, y^2, xy אינו אפס. נשים לב כי $a + 2bx + 2cy + dx^2 + 2exy + fy^2$ ניתן לרשום גם בצורה מטריציונית $\begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a + 2(x, y) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix})$. נקרא המטריצה המצומצמת. כמו כן אפשר גם לרשום $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$. המטריצה הזו תקרא המטריצה המורחבת.
- הגדרה: העתקה אורתוגונלית מוכללת הינה $f: R^2 \rightarrow R^2$ כך ש $f(v) = T(v) + v_0$ כאשר f העתקה אורתוגונלית ו $v_0 \in R^2$. (נשים לב שזו לא העתקה לינארית!!)
- הרכבה של העתקות אורתוגונליות מוכללת היא כזו, וכמו כן העתקה שכזו היא הפיכה ומתקיים $f^{-1}(v) = T^{-1}v - T^{-1}v_0$ אז $f = Tv + v_0$
- שניוניות חופפות: שתי שניוניות X, Y (נזכר ששניוניות הן למעשה פולינומים, או אוסף כול הנקודות במישור שמאפסות את הפולינום) יקראו חופפות אם יש העתקה אורתוגונלית מוכללת כך ש $TX = Y$.
- אם שתי שניוניות חופפות אז המטריצות המורחבות שלהן חופפות והמטריצות המצומצמות חופפות אורתוגונלית (כלומר גם דומות אורתוגונלית). נובע מהפעלת ההעתקה על אחת השניוניות ובנייה קונסטרוקטיבית של מטריצה שתתאים בדיוק.

לכסון משותף:

- אם עבור שתי מטריצות A, B קיימת P הפיכה כך ש p מדמה גם את A וגם את B למטריצה אלכסונית אז נאמר של A ו B יש לכסון משותף.
- טענה: אם A ו B מתחלפות בכפל יש להן וקטור עצמי משותף (מעל C) אך לא בהכרח לאותו ע"ע. יהי λ ע"ע כלשהו של A ו $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס למרחב העצמי של למדא. בה"כ $Bv_i \neq 0$ אחרת קיבלנו כי יש וקטור עצמי משותף... לכן $ABv_i = \lambda Bv_i$ לכן Bv_i ו"ע של A לכול i . לכן ניתן לפרוש את Bv_i ע"י הבסיס לכול i . נסמן ב y_i את וקטור הקואורדינטות של פריסת Bv_i לפי הבסיס של הוקטורים העצמיים. נסתכל על מטריצה Y שעמודותיה הן y_i והמטריצה X שעמודותיה הן וקטורי הבסיס למרחב העצמי. לכן $XY = BX$ ולכן עבור ו"ע z כלשהו של Y מתקיים Xz ו"ע של B (כי Xz שונה מאפס כי X עמודותיה בלתי תלויות) כמו כן Xz הוא פרישה של אברי הבסיס ולכן נמצא במרחב העצמי ולכן וקטור עצמי של A ולכן יש להם וקטור עצמי משותף.
- שילוש משותף: לשתי מטריצות מתחלפות מעל C יש שילוש אוניטרי משותף. נובע מאינדוקציה על הטענה לעיל.
- לכסון משותף: שתי מטריצות נורמליות מתחלפות בכפל אמ"מ יש להם לכסון משותף. נובע מהמשפט לעיל והעובדה שמטריצה נורמלית משולשית חייבת להיות אלכסונית (כי הכוכב שלה הוא טרזפוז שלה אבל גם פולינום בה)

בעיות קירוב:

- הגדרה: בהנתן תת מרחב ווקטור v מחוץ לתת המרחב נרצה למצוא את הווקטור שבתוך תת המרחב שהוא הקרוב ביותר לווקטור v . (כאשר מרחק זה מכפלה פנימית)
- משפט: בהנתן תת מרחב $W \subseteq V$ ו $v \in V$ אז $w_0 \in W$ הוא הקרוב ביותר ל v אמ"מ $v - w_0 \in W^\perp$ והווקטור w_0 יחיד והוא נתון על ידי ההטלות של v על בסיס אורתונורמלי של W .

- בעיית הריבועים הפחותים: בהנתן קבוצה של n נקודות במישור נחפש קו ישר העובר הכי קרוב לכול הנקודות האלה, כאשר המרחק נמדד בריבוע. כלומר בהנתן המערכת $Ax = b$ שאין לה פתרון נחפש $\bar{x} \in R^n$ כך ש $\|b - A\bar{x}\| \leq \|b - Ax\|$ לכול $x \in R^n$. נקבל כי $\bar{x}$ כנל מקיים $A^t A \bar{x} = b$ ולמערכת הזו יש פתרון.