

רשימת משפטים ללינארית 2 עם סמיון

1 הגדרות

1. יהי V מרחב וקטורי אזי נגדיר את המרחב הדואלי ל- $V^* = L(V, \mathbb{F})$
2. יהי $v \in V$ אזי נגדיר $v^\circ = \{\varphi \in V^* | \varphi(v) = 0\}$
3. יהי $\varphi \in V^*$ אזי נגדיר $\varphi_\circ = \{v \in V | \varphi(v) = 0\}$
4. איזומורפיזם קונוני: $c : V \rightarrow V^{**}$ כך $c(v)(\varphi) = \varphi(v)$
5. העתקה דואלית: $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית אזי נגדיר $T^* : W^* \rightarrow V^*$ כך $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$
6. פולינום פורמלי: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדרה אינסופית $(f_0, f_1, \dots)$ כאשר $f_i \in \mathbb{F}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. המתאפסת החל ממקום מסוים תקרא פולינום פורמלי ונסמן ב- $\mathbb{F}[x]$ את קבוצת הפולינומים הפורמליים
7. פעולות על פולינום פורמליים: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ו- $c \in \mathbb{F}$ אזי נגדיר:
 1. $(f + g)_k = f_k + g_k$
 2. $(c * f)_k = c f_k$
 3. $(f * g)_k = \sum_{i=0}^k f_i * g_{k-i}$
8. יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ נגדיר $\deg f = \max\{n | f_n \neq 0\}$
9. $f, g \in \mathbb{F}[x]$ אזי נגיד ש- f מחלק את g ונסמן $f|g$ אם קיים $c \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $g = f * c$
10. $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ו- $f, g \neq 0$ אז נגדיר $\gcd(f, g) = \min_{by degree} \{f * v + g * u | v, u \in \mathbb{F}[x]\}$
11. $f \in \mathbb{F}[x]$ יקרא הפיך אם קיים $g \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $f * g = 1$
12. $f \in \mathbb{F}[x]$ יקרא אי פריק אם f לא הפיך וגם לכל $g, h \in \mathbb{F}[x]$ שמקיימים $f = g * h$ אז g הפיך או h הפיך
13. $f \in \mathbb{F}[x], a \in \mathbb{F}$ אז a יקרא שורש של f אם $f(a) = \sum_{i \geq 0} f_i a^i = 0$
14. $f \in \mathbb{F}[x], a \in \mathbb{F}$ ו- a שורש של f אזי הריבוי של a מוגדר להיות $\max\{k | (x-a)^k | f\}$
15. שדה $\mathbb{F}$ יקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום לא קבוע יש שורש
16. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו- $V \rightarrow V$ φ העתקה לינארית נגדיר $\det \varphi = \det A$ כאשר A מטריצה מייצגת של φ בבסיס כלשהו
17. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו- $V \rightarrow V$ φ העתקה לינארית נגדיר $tr \varphi = tr A$ כאשר A מטריצה מייצגת של φ בבסיס כלשהו ועבור מטריצות $tr A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$
18. פולינום אופייני: $\varphi : V \rightarrow V$ נגדיר $P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda * I_n)$
19. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של φ אם קיים $v \in V, v \neq 0$ כך ש- $\varphi(v) = \lambda * v$
20. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי $v \in V, v \neq 0$ נקרא וקטור עצמי של φ אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $\varphi(v) = \lambda * v$

21. $\varphi : V \rightarrow V$ תקרא לכסינה אם ל- V קיים בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של φ
22. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי נגדיר לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי את
 $M_\lambda = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda * x\} = \ker(\varphi - \lambda * I_n)$
23. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי תת מרחב $W \subset V$ נקרא φ אינוואריאנטי אם מתקיים
 $\forall v \in W. \varphi(v) \in W$
24. $\varphi : V \rightarrow V$ אם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים שונים אזי הסכום $M_{\lambda_1} + \dots + M_{\lambda_k}$ הוא סכום ישר
25. $\varphi : V \rightarrow V$ $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי אז נגדיר:
 1. הריבוי גיאומטרי של λ הוא $\dim M_\lambda$
 2. הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ כשורש של P_φ
26. מירכוב של מרחב וקטורי ממשי: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ נגדיר ${}^{\mathbb{C}}V$ בצורה הבאה:
 ${}^{\mathbb{C}}V = V \times V$ כאשר החיבור הוא לפי קואורדינטות והכפל בסקלר מוגדר
 $z * (a, b) = (u + iv)(a, b) = (ua - vb, ub + va)$
27. מירכוב של העתקה לינארית: $\varphi : V \rightarrow V$ אזי נגדיר ${}^{\mathbb{C}}\varphi : {}^{\mathbb{C}}V \rightarrow {}^{\mathbb{C}}V$ כך
 ${}^{\mathbb{C}}\varphi(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b))$
28. תא ז'ורדן מסדר k של הערך העצמי λ מוגדר בצורה כמטריצה המקיימת
 $J_k(\lambda)_{ij} = 0$ אחרת $J_k(\lambda)_{ij} = \lambda, j = i + 1$ אם $J_k(\lambda)_{ij} = \lambda, j = i + 1$
29. מטריצה היא בצורת ז'ורדן אם היא מטריצת בלוקים אלכסונית כשכל בלוק הוא תא ז'ורדן
30. אומרים שטרנספורמציה $\varphi : V \rightarrow V$ היא ז'רדנה אם קיים בסיס בו המטריצה המייצגת שלה היא בצורת ז'ורדן
31. $\varphi : V \rightarrow V$ תקרא נילפוטנטית אם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $\varphi^m = 0$
32. $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow V$ כאשר קיימים תתי מרחבים W_1, W_2 כך ש
 $\varphi_1(W_2) = \{0\}, \varphi_2(W_1) = \{0\}$ אז נגדיר $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ כך $\varphi(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v)$
33. $\varphi : V \rightarrow V$ אז נגדיר $M^i = \ker \varphi^i$ ועבור ערך עצמי λ נגדיר $M_\lambda^i = \ker(\varphi - \lambda * I_n)^i$
34. $\varphi : V \rightarrow V$ אז נגדיר $N^i = \text{img} \varphi^i$
35. $\varphi : V \rightarrow V$ אז נגדיר $\text{spec} \varphi$ כקבוצת הערכים העצמיים של φ
36. $\varphi : V \rightarrow V$ ויהי λ ערך עצמי של φ כך ש $M_\lambda^{k-1} \neq M_\lambda^k = M_\lambda^{k+1}$ אז נגדיר
 $\widehat{M}_\lambda = M^k$
37. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ בעל מציין שונה מ-2 אזי נגדיר פונקציונאל בילינארי כפונקציה $\xi : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ שמקיימת:
 1. $\forall v, u, w \in V. \xi(v + u, w) = \xi(v, w) + \xi(u, w)$
 2. $\forall v, u \in V, \lambda \in \mathbb{F}. \xi(\lambda * v, u) = \lambda \xi(v, u)$
 3. $\forall v, u, w \in V. \xi(v, u + w) = \xi(v, w) + \xi(v, u)$
 4. $\forall v, u \in V, \lambda \in \mathbb{F}. \xi(v, \lambda * u) = \lambda \xi(v, u)$

38. נגדיר $\mathbb{T}_2(V)$ כמרחב הפונקציונאליים הבילינאריים מעל V
39. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{T}_2, \lambda \in \mathbb{F}$ נגדיר $(\xi_1 + \xi_2)(x, y) = \xi_1(x, y) + \xi_2(x, y)$ ו
 $(\lambda \xi_1)(x, y) = \lambda * \xi_1(x, y)$
40. פונקציונאל בילינארי ξ יקרא סימטרי אם מתקיים $\forall x, y. \xi(x, y) = \xi(y, x)$ ונסמן את מרחב כל הפונקציונאליים הלינאריים הסימטריים מעל V כך $Sym(V)$
41. פונקציונאל בילינארי ξ יקרא אנטי-סימטרי אם מתקיים $\forall x, y. \xi(x, y) = -\xi(y, x)$ ונסמן את מרחב כל הפונקציונאליים הלינאריים הסימטריים מעל V כך $Skew(V)$
42. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ נגדיר את המטריצה של ξ לפי בסיס $\{b\}$ כמטריצה A המקיימת
 $\forall x, y. \xi(x, y) = [x]_b^t * A * [y]_b$
43. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ אז הדרגה של ξ היא דרגת המטריצה המייצגת של ξ לפי בסיס כלשהו
44. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ אז נגדיר $\ker^l \xi = \{x \in V | \xi(x, y) = 0 \forall y \in V\}$
 $\ker^r \xi = \{x \in V | \xi(y, x) = 0 \forall y \in V\}$
45. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ יקרא לא מנוון אם $rk(\xi) = \dim V$
46. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ $(\widehat{\xi}^l(x))(y) = \xi(x, y), (\widehat{\xi}^r(x))(y) = \xi(y, x)$
47. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ $L \subset V$ תת מרחב לינארי אז המשלים האורתוגונלי של L ביחס ל ξ
 $L_{\perp_\xi} = \{x \in V | \xi(x, l) = 0 \forall l \in L\}$
48. פונקציה $b : V \rightarrow \mathbb{F}$ תקרא תבנית ריבועית אם קיים $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ כך ש $\forall x \in V$
 $V.b(x) = \xi(x, x)$
49. המטריצה המייצגת של תבנית ריבועית בבסיס $\{b\}$ היא המטריצה המייצגת של הפונקציונאל הבילינארי הסימטרי של התבנית
50. מטריצה משולשית יחידה היא מטריצה משולשית שהאלכסון שלה הוא 1
51. מישור זוויתי מגודל k של A הוא הבלוק בגודל $k \times k$ שמתחיל בזווית השמאלית העליונה שיסומן A_k ונגדיר $\Delta_k = \det A_k$
52. שני תבניות ריבועיות יקראו שקולות אם קיימים שני בסיסים כך שהמטריצה של הראשונה בבסיס הראשון שווה למטריצה של השנייה בבסיס השני
53. עבור תבנית ריבועית נגדיר אינדקס אינרציה חיובי ככמות המקדמים החיוביים בצורה הקנונית, בצורה דומה לשלילי וסיגנטורה היא ההפרש בין החיובי לשלילי
54. תבנית ריבועית תקרא מוגדרת חיובית אם לכל x $b(x) > 0$
55. תבנית ריבועית תקרא מוגדרת שלילית אם לכל x $b(x) > 0$
56. תהי b תבנית ריבועית המוגדרת על ידי הפונקציונאל ξ אזי ויהיו $x_1, \dots, x_m \in V$ אזי המטריצת גרם שלהם תוגדר $B_b(x_1, \dots, x_m)_{ij} = \xi(x_i, x_j)$
57. מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי עם פונקציונאל בילינארי ξ סימטרי מוגדר חיובית

58. סדרת וקטורים $x_1, \dots, x_m$ תקרא אורתוגונלית אם לכל 2 מתקיים $\xi(x_i, x_j)$ ותקרא אורתונורמלית אם בנוסף מתקיים לכל וקטור ש $\xi(x_i, x_i) = 1$
59. במרחב מכפלה פנימית נגדיר נורמה של x כ $\|x\| = \sqrt{\xi(x, x)}$
60. איזומורפיזם של מרחבי מכפלה פנימית צריך להיות איזומורפיזם של מרחבים וקטורי ובנוסף לקיים $\forall x, y. (T(x), T(y)) = (x, y)$
61. במרחב מכפלה פנימית עבור ט"ל T נגדיר את הט"ל הצמודה T^* להיות היחידה שמקיימת $\forall x, y. (Tx, y) = (x, T^*y)$
62. $T^* = T$ תקרא צמודה לעצמה אם מתקיים ש $T^* = T$
63. $\varphi : V \rightarrow V$ תקרא אורתוגונלית אם $\forall x \in V. \|\varphi(x)\| = \|x\|$
64. $\varphi : V \rightarrow V$ תקרא מוגדרת חיובית אם היא צמודה לעצמה וגם מתקיים $\forall x. (\varphi x, x) > 0$
65. $\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ יקרא הרמיטי אם הוא לינארי במשתנה הראשון ו $\forall x, y. \eta(x, y) = \overline{\eta(y, x)}$
66. מטריצה תקרא הרמיטית אם היא שווה למוד המשוחלף שלה כלומר $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$
67. מימוש של מרחב וקטורי מרוכב V שישומן כ ${}^{\mathbb{R}}V$ הוא הצגת V כקבוצה עם חיבור וכפל בסקלר מושרים מ V
68. מטריצה מייצגת של פונקציונאל הרמיטי η בבסיס $\{e_i\}$ היא המטריצה $B_{ij} = \eta(e_i, e_j)$
69. $\ker \eta = \{x | \forall y. \eta(x, y) = 0\}$ פונקציונאל הרמיטי אז
70. פונקציונאל הרמיטי η יקרא מוגדר חיובית אם מתקיים $\forall x \neq 0. \eta(x, x) > 0$
71. מטריצה הרמיטית מוגדרת חיובית אם הפונקציונאל שהיא מייצגת הוא מוגדר חיובית
72. מרחב הרמיטי זה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם פונקציונאל הרמיטי מוגדר חיובית
73. הגדרת סדרה אורתוגונלית במרחב הרמיטי זהה להגדרה במרחב מכפלה פנימית
74. ט"ל תקרא אוניטרית אם היא הפיכה ומשמרת מכפלה הרמיטית
75. מטריצה A תקרא אוניטרית אם $\overline{A}^t * A = I$

2 משפטים ומסקנות

1. יהי $T \subset V^*$ אזי $c(T_0) = T^0$
2. $\mathbb{F}[x]$ מרחב וקטורי
3. $f, g \in \mathbb{F}[x]$ אם $f, g \neq 0$ אזי $\deg(f * g) = \deg f + \deg g$ ו $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
4. יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ו $f, g \neq 0$ אזי קיימים ויחידים $q, r \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $f = g * q + r$ וגם $\deg r < \deg g$
5. $a, b, c \in \mathbb{F}[x]$ אז:
 1. אם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|(b \pm c)$
 2. אם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|(b * c)$
 3. אם $a|b$ אז $a|b * c$ ו $a|b_1, \dots, b_n$ אז $a|b_1 * c_1 + \dots + b_n * c_n$
6. אם $a|b$ וגם $b|a$ אז קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש $a = c * b$
7. $a, b \in \mathbb{F}[x]$ אז $\gcd(a, b) | a$ וגם $\gcd(a, b) | b$ ו $c \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $c | a, b$ אז $\gcd(a, b) | c$
8. ב $\mathbb{F}[x]$ ההפיכים היחידים הם הפולינומים הקבועים
9. $f \in \mathbb{F}[x]$ לא הפיך אזי קיימים ויחידים (עד כדי תמורה) $p_1, \dots, p_r$ כך שכולם אי פריקים וגם $f = p_1 * p_2 * \dots * p_r$
10. $\mathbb{R}$ מתקיים שלכל $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$:
 1. $\gcd(f, g) = f$ אם ורק אם $f | g$
 2. אם $f \neq 0$ אז $\gcd(f, 0) = f$
 3. $t \in \mathbb{R}, \gcd(t * f, t * g) = t * \gcd(f, g)$
 4. $\gcd(\gcd(f, g), h) = \gcd(f, \gcd(g, h))$
11. $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$ אז:
 1. אם $\gcd(f, g) = 1$ וגם $\gcd(f, h) = 1$ אז $\gcd(f, g * h) = 1$
 2. אם $f | g$ וגם $\gcd(f, g) = 1$ אז $f | h$
 3. אם $h | f, g$ וגם $\gcd(g, h) = 1$ אז $h * g | f$
12. $f \in \mathbb{F}[x], a \in \mathbb{F}$ אז קיים ויחיד $g \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $f = g * (x - a) + f(a)$
13. $f \in \mathbb{F}[x], a \in \mathbb{F}$ אז a שורש של f אם ורק אם $(x - a) | f$
14. $\mathbb{C}$ סגור אלגברית
15. $f \in \mathbb{F}[x]$ סגור אלגברית ו f אי פריק אזי $\deg f = 1$
16. יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית אזי לכל $f \in \mathbb{F}[x]$ סכום ריבויי השורשים שוו לדרגת f
17. יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ אזי אם f אי פריק $\deg f = 1$ או $\deg f = 2$ ול אין שורשים
18. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי עבור A מטריצה מייצגת של φ בבסיס כלשהו $P_\varphi(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (A_{1\sigma(1)} - \lambda \delta_{1\sigma(1)}) * \dots * (A_{n\sigma(n)} - \lambda \delta_{n\sigma(n)})$

19. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של φ אם ורק אם $\ker(\varphi - \lambda * I_n) \neq \{0\}$
אם ורק אם λ שורש של P_φ

20. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי $\deg P_\varphi = \dim V$

21. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי מספר הערכים העצמיים של φ הוא לכל היותר $\dim V$

22. אם $\mathbb{F}$ סגור אלגברית אזי לכל $\varphi : V \rightarrow V$ קיים וקטור עצמי

23. $\varphi : V \rightarrow V$ אז $\dim V$ שורשים אז φ לכסינה

24. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי אם $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים אזי הם
בת"ל

25. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי לכל λ ערך עצמי מתקיים שהריבוי האלגברי שלו גדול שווה לריבוי
הגיאומטרי שלו

26. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי φ לכסינה אם ורק אם P_φ מתפרק לגורמים מדרגה ראשונה וגם
הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו

27. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי קיים מרחב φ אינוואריאנטי ממימד 1 או 2

28. יהי V מרחב וקטורי ממשי אזי מימד V מעל $\mathbb{R}$ שווה למימד ${}^{\mathbb{C}}V$ מעל $\mathbb{C}$

29. משפט ז'ורדן (חשוב): $\varphi : V \rightarrow V$ אז φ ז'רדינה אם ורק אם P_φ מתפרק לגורמים
מדרגה 1 וצורת ז'ורדן של φ היא יחידה עד כדי תמורת הבלוקים

30. $\varphi : V \rightarrow V$ אז קיימים ויחידים φ_1, φ_2 כך ש φ_1 נילפוטנטית φ_2 הפיכה ו
 $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$

31. $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow V$ אז $P_{\varphi_1 \oplus \varphi_2} = P_{\varphi_1} * P_{\varphi_2}$

32. $\varphi : V \rightarrow V$ אזי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

1. M^i, N^i הם φ אינוואריאנטי

2. $N^{i+1} \subset N^i, M^i \subset M^{i+1}$

3. אם $M^k = M^{k+1}$ אז מתקיים ש $M^k = M^{k+1} = M^{k+2} = \dots$ ואותו דבר ל N^k

33. $\varphi : V \rightarrow V$ אם $M^k = M^{k+1}$ אז $\varphi|_{M^k}$ נילפוטנטית ו $\varphi|_{N^k}$ הפיכה

34. $\varphi : V \rightarrow V$ אם φ נילפוטנטית אז $\text{spec} \varphi = \{0\}$ ו $P_\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n$

35. יהיו $N, L \subset V$ תתי מרחבים לינאריים כך ש $N \cap L = \{0\}$ אז קיים תת מרחב L'
כך ש $N \oplus L' = V$

36. $\varphi : V \rightarrow V$ ו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים אז הסכום $\widehat{M}_{\lambda_i}$ הוא סכום ישר $\sum_{i=1}^k$

37. $\varphi : V \rightarrow V$ כך ש P_φ מתפרק לגורמים מדרגה 1 אז $\widehat{M}_\lambda = V$ $\bigoplus_{\lambda \in \text{spec} \varphi}$

38. משפט קיילי המילטון: יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ותהי $A \in M(\mathbb{F})$ כך ש $p = \det(A - \lambda * I)$
אזי $p(A) = p_0 * I + p_1 * A + \dots + p_n * A^n = 0$

39. $\xi \in T_2(V)$ היא סימטרית אם ורק אם המטריצה המייצגת שלה סימטרית בכל בסיס

40. $\mathbb{T}_2(V) = \text{Sym}(V) \oplus \text{Skew}(V)$
41. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ ו $\{b\}, \{e\}$ בסיסים B המטריצה המייצגת של ξ לפי הבסיס b ו E המטריצה המייצגת של ξ לפי e ו C מטריצת המעבר מהבסיס b לבסיס e אז
 $E = C^t * B * C$
42. $\dim \ker^l \xi = \dim \ker^r \xi = \dim V - rk(\xi)$ אז $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$
43. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ אז $(\hat{\xi}^l(x)), (\hat{\xi}^r(x))$ העתקות לינאריות
44. $\ker \hat{\xi}^l = \ker \xi^l, \ker \hat{\xi}^r = \ker \xi^r$ $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$
45. $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ אזי הטענות הבאות שקולות :
 1. ξ לא מנוון
 2. ξ^l איזומורפיזם
 2. ξ^r איזומורפיזם
46. $V = L \oplus L_{\perp_\xi}$ יהי $L \subset V$ תת מרחב לינארי $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ לא מנוון אזי
47. לכל $\xi \in \mathbb{T}_2(V)$ בהינתן בסיס $\{b\}$
48. לכל $\xi \in \text{Sym}(V)$ קיים בסיס בו המטריצה שלה אלכסונית
49. לכל תבנית ריבועית קיים ויחיד $\xi \in \text{Sym}(V)$ כך ש $\forall x \in V. b(x) = \xi(x, x)$
50. כל תבנית ריבועית ניתנת להצגה בצורה הבאה:
 $b(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + 2 * \sum_{i < j} b_{ij} x_i * x_j$
51. שיטת לגראנז' לליכסון תבנית ריבועית: נחלק למקרים:
 $b_{11} \neq 0$ אז נסדר מחדש $b(x)$
 $b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + \sum_{i=2}^n (b_{ii} - \frac{b_{ii}^2}{b_{11}}) x_i^2 + 2 * \sum_{2 \leq i < j} (b_{ij} - \frac{b_{1j} * b_{1i}}{b_{11}}) x_i x_j$
 נגדיר $x'_i = x_i + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i$ ו $x'_1 = x_1$ ונחזור להתחלה
 2. אם $b_{11} = 0$ אבל קיים k כך ש $b_{kk} \neq 0$ נעשה תמורה לאיברים ונחזור למקרה 1
 3. אם כל המקדמים הריבועיים 0 אז או שהתבנית היא התבנית הקבועה 0 או שקיימים i, j כך ש $b_{ij} \neq 0$ נעשה תמורה כך ש $i = 1, j = 2$ ואז נעשה את ההחלפה $x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, x'_2 = \frac{x_2 - x_1}{2}$ ונחזור למקרה 1
52. משפט יעקובי: תהי b תבנית ריבועית אזי ניתן ללכסן את b באמצעות מטריצה משולשית יחידה אם ורק אם $\forall k. \Delta_k \neq 0$ ואז באלכסון בצורה האלכסונית במיקום k יופיע $\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ כאשר $\Delta_0 = 1$
53. מעל שדה סגור אלגברית שני תבניות ריבועיות שקולות אם ורק אם דרגתן זהה
54. אינדקסי האינרציה של תבנית ריבועית לא תלויים בבחירת הבסיס
55. תבנית ריבועית היא מוגדרת חיובית אם ורק אם אינדקס האינרציה החיובית שלה הוא n
56. תבנית ריבועית היא מוגדרת שלילית אם ורק אם אינדקס האינרציה השלילית שלה הוא n

57. אם b היא תבנית ריבועית מוגדרת חיובית אז בכל בסיס המטריצה המייצגת הפיכה והדטרמיננטה שלה גדולה מ-0
58. משפט סילבסטר: מטריצה סימטרית ממשית היא מוגדרת חיובית אם ורק אם $\forall k \Delta_k > 0$
59. תהי b תבנית ריבועית אזי $\forall x_1, \dots, x_n \det B_b(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ והשוויון מתקבל אם ורק אם הוקטורים תלויים
60. במרחב מכפלה פנימית $\forall x, y. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ויש שוויון אם ורק אם הם תלויים עם קבוע אי שלילי
61. בכל מרחב מכפלה פנימית קיים בסיס אורתונורמלי
62. תהי $x_1, \dots, x_m$ סדרת וקטורים בת"ל תהליך גרם שמידט שיהפוך אותה לסדרה אורתונורמלית יוגדר כך $x'_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ ואז $x'_i = \frac{x_i - \sum_{k=1}^i \xi(x_i, x'_k)x'_k}{\|x_i - \sum_{k=1}^i \xi(x_i, x'_k)x'_k\|}$
63. תהליך גרם שמידט משמר פריסה לכל תת קבוצה כלומר לכל $x_1, \dots, x_m$ ולכל $k \leq m$ מתקיים ש $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{span}\{x'_1, \dots, x'_k\}$
64. כל סדרה אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית ניתן להשלים לבסיס אורתונורמלי
65. שני מרחבי מכפלה פנימית הם איזומורפיים אם ורק אם מימדם זהה
66. יהיו $\lambda, \eta \in \mathbb{F}$ ו T, S ט"ל במרחב מכפלה פנימית אזי:
 $(T^*)^* = T$
 $(\lambda T + \eta S)^* = \lambda T^* + \eta S^*, (S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ אם T הפיכה אז T^* הפיכה ו
67. $T : V \rightarrow V$ מרחב מכפלה פנימית אזי בכל בסיס אורתונורמלי $\{b\}$ מתקיים $[T]_b^t = [T^*]$ ש:
68. $T : V \rightarrow V$ מרחב מכפלה פנימית אזי לכל מרחב T אינווארינטי מתקיים שהמשלים האורתוגונלי שלו הוא T^* אינוואריאנטי
69. $T : V \rightarrow V$ אזי הטענות הבאות שקולות:
 T.1 צמודה לעצמה
 T.2 בכל בסיס אורתונורמלי המטריצה של T היא סימטרית
 T.3 קיים בסיס אורתונורמלי בו המטריצה של T סימטרית
70. $T : V \rightarrow V$ צמודה לעצמה אזי קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T (בסיס מלכסן)
71. $T : V \rightarrow V$ צמודה לעצמה אזי וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים
72. לכל פונקציונאל בילינארי קיימת ויחידה ט"ל T כך ש $\xi = B_T$ כאשר $B_T(x, y) = (x, Ty)$
73. משפט רייס: $\varphi : V \rightarrow V$ מרחב מכפלה פנימית אזי קיים ויחיד $y \in V$ כך ש $\forall x \in V. \varphi(x) = (x, y)$

74. V מרחב מכפלה פנימית ו $\varphi : V \rightarrow V$ אזי הטענות הבאות שקולות:
1. φ אורתוגונלית
 2. φ מעבירה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי
 3. קיים בסיס φ מעבירה לבסיס אורתונורמלי
 4. $\varphi^* \circ \varphi = I$
75. הרכבה של טרנספורמציות אורתוגונליות והופכית של טרנספורמציה אורתוגונלית הם אורתוגונליים
76. לכל $\varphi : V \rightarrow V$ אורתוגונלית קיים בסיס בו היא בצורה קנונית כשהצורה הקונונית היא מטריצה אלכסונית בלוקים כך שכל הבלוקים בגודל 1 או 2 והבלוקים בגודל 2 באלכסון הראשי יש $\cos \theta$ ובאלכסון המשני $\sin \theta$ כשבפינה הימנית העליונה מוכפל המינוס עבור $0 < \theta < \pi$
77. הדטרמיננטה של מטריצה המייצגת T אורתוגונלית היא 1 או -1
78. הצורה הקונונית של T אורתוגונלית היא יחידה עד כדי תמורת הבלוקים
79. אם מרחב לינארי הוא אינוואריאנטי ל T אורתוגונלית אז גם המשלים האורתוגונלי שלו אינוואריאנטי לה
80. $\varphi : V \rightarrow V$ אורתוגונלית ו $x + iy \in V$ וקטור עצמי של φ עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{C}$:
1. $|\lambda| = 1$
 2. $\|x\| = \|y\|$
 3. $(x, y) = 0$
81. T היא מוגדרת חיובית אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה חיוביים
82. כל T מוגדרת חיובית היא הפיכה וההופכית שלה היא גם מוגדרת חיובית
83. לכל T הפיכה ההרכבה של על הצמודה שלה (משני הצדדים) היא מוגדרת חיובית
84. $\varphi : V \rightarrow V$ מוגדרת חיובית אזי קיימת ויחידה $T : V \rightarrow V$ כך ש $T^2 = \varphi$
85. T היא ויחידה שהיא גם מוגדרת חיובית וגם אורתוגונלית היא טרנספורמציות הזהות
86. תהי $\varphi : V \rightarrow V$ הפיכה אז קיימות ויחידות $T, U : V \rightarrow V$ כך ש U אורתוגונלית T מוגדרת חיובית ו $\varphi = U \circ T$
87. מימד המימוש של מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ הוא פי 2 ממימד המרחב מעל $\mathbb{C}$
88. הפונקציה $T : V \rightarrow R$ שמקיימת $T(x) = \eta(x, x)$ היא תבנית ריבועית
89. η פונקציונאל הרמיטי אז $\eta(x, y) = \frac{1}{4}(\eta(x + y, x + y) + i\eta(x + iy, x + iy) - \eta(x - y, x - y) - i\eta(x - iy, x - iy))$
90. המטריצה מייצגת של פונקציונאל הרמיטי היא הרמיטית בכל בסיס
91. לכל פונקציונאל הרמיטי יש בסיס שבו המטריצה המייצגת שלו היא אלכסונית ובאלכסון רק $\pm 1, 0$

92. מספר האפסים מספר ה-1 ומספר ה-1 במטריצה האלכסונית של פונקציונאל הרמיטי לא תלויים בבסיס המלכסן

93. η פונקציונאל הרמיטי אז $\dim \ker \eta = \dim V - rk \eta$

94. משפט סילבסטר: מטריצה הרמיטית היא מוגדרת חיובית אם ורק אם $\forall i, \Delta_i > 0$

95. כל המשפטים וההגדרות כולל תהליך גרם שמידט תקפים ללא שינוי במרחב הרמיטי מלבד כמה שעוברים שינוי קל ושיכתבו להלן

96. ט"ל צמודה במרחב הרמיטי: $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

97. $[T^*] = \overline{[T]}^t$

98. ט"ל צמודה לעצמה מקיימת שבכל בסיס אורתונורמלי המטריצה היא הרמיטית

99. לט"ל צמודה לעצמה כל הערכים העצמיים ממשיים וקיים בסיס מלכסן של וקטורים אורתונורמליים

100. תהי T ט"ל הטענות הבאות שקולות:

$T.1$ אוניטרית

$T.2$ משמרת מכפלה הרמיטית

$T.3$ משמרת נורמה

$T.4$ המטריצה של T בבסיס אורתונורמלי היא אוניטרית

101. כל הערכים העצמיים של מטריצה אוניטרית בעלי נורמה 1