מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

1 במאי 2016

1 משתנה מקרי פואסוני

סימון: $X \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda\right)$, λפרמטר שמתאר קצב.

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!},\ \ \forall k\in\mathbb{N}$$

תרגיל X מספר המכוניות שנכנסות לצומת ארלוזורוב־נמיר בשעה. X מתפלג פואסונית ע פרמטר λ. כל מכונית שנכנסת לצומת פונה ימינה בסיכוי p, או שמאלה בסיכוי $1-p$, באופן בלתי־תלוי ברכבים האחרים. X_R ־ מספר המכוניות שפונות ימינה בשעה. X_L ־ מספר המכוניות שפונות שמאלה בשעה.

1. כיצד מתפלגים X_R, X_L?
2. האם X_R, X_L תלויים? (פיצול פואסונים)
3. האם X_R, X_L תלויים בהינתן $X=n$?

פתרון

1. $\mathrm{Supp}\left(X_R\right)=\left\{0,1,\ldots\right\}=\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_R=k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(X_R=k\mid X=n\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=n\right)=\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left(X_R=k\mid X=n\right)\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n}}{n!}\\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n}}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n}}{n!}=\\
&= e^{-\lambda}\frac{p^{k}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(1-p\right)^{n-k}\lambda^{n}}{\left(n-k\right)!}=e^{-\lambda}\frac{p^{k}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(1-p\right)^{m}}{m!}\lambda^{m+k}=e^{-\lambda}\frac{\left(\lambda p\right)^{k}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\left(1-p\right)\lambda\right)^{m}}{m!}=\\
&= e^{-\lambda p}\frac{\left(\lambda p\right)^{k}}{k!}
\end{aligned}$$

כלומר, $X_R \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda p\right)$, ועל ידי הצבה נקבל $X_L \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda\left(1-p\right)\right)$.

2. המשתנים בלתי־תלויים. נוכיח זאת: עבור r,l שלמים אי שליליים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_R=r,X_L=l\right) &= \mathbb{P}\left(X_R=r,X_L=l\mid X=r+l\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=r+l\right)=\\ &= \binom{r+l}{r}\cdot p^r\left(1-p\right)^l\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{r+l}}{(r+l)!}=\\ &= \frac{(r+l)!p^r\left(1-p\right)^l e^{-\lambda}\lambda^r\lambda^l}{r!\cdot l!\cdot(r+l)!}=\\ &= e^{-\lambda p}\frac{\left(\lambda p\right)^r}{r!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}\cdot\frac{\left(\lambda\left(1-p\right)\right)^l}{l!}=\mathbb{P}\left(X_R=r\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_L=l\right)\end{aligned}$$

3. אם נתון $X=n$, אזי $X_R+X_L=n$ ולכן הם תלויים לינארית. לדוגמא:

$$0=\mathbb{P}\left(X_R=n,X_L=n\mid X=n\right)\neq\mathbb{P}\left(X_R=n\mid X=n\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_L=n\mid X=n\right)$$

2 חיבוריות של משתנים מקריים

1. אם $X_1\sim\mathrm{Pois}\left(\lambda_1\right),X_2\sim\mathrm{Pois}\left(\lambda_2\right)$ והם בלתי־תלויים אזי $X_1+X_2\sim\mathrm{Pois}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$.
2. אם $X_1\sim\mathrm{Bin}\left(n_1,p\right),X_2\sim\mathrm{Bin}\left(n_2,p\right)$ והם בלתי־תלויים אזי $X_1+X_2\sim\mathrm{Bin}\left(n_1+n_2,p\right)$.

3 תוחלת

יהי X משתנה מקרי על $(\Omega,\mathbb{P})$, אזי התוחלת שלו היא

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\right)=\sum_{k\in\mathrm{Supp}(X)}\mathbb{P}\left(X=k\right)\cdot k$$

נסמן

$$\begin{aligned}I &= \sum_{0<k\in\mathrm{Supp}(X)}\mathbb{P}\left(X=k\right)\cdot k\\ II &= \sum_{0>k\in\mathrm{Supp}(X)}\mathbb{P}\left(X=k\right)\cdot k\end{aligned}$$

אם $I=\infty,II=-\infty$ אזי התוחלת לא מוגדרת.
אם $I=\infty,II>-\infty$ אזי התוחלת היא ∞.
אם $I<\infty,II=-\infty$ אזי התוחלת היא $-\infty$.
אם $I<\infty,II>-\infty$ אזי התוחלת סופית.

התוחלת היא לינארית: יהיו X,Y משתנים מקריים, ויהי c קבוע.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+Y] &= \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\\ \mathbb{E}[cX] &= c\mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

תרגיל בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 0 עד 9, באופן בלתי תלוי ביתר הספרות. X הוא מספר הרצפים של 11 בקוד. חשבו את $\mathbb{E}[X]$.

פתרון ניתן לחשב את התפלגות X ומתוכה את התוחלת שלו, אבל זה מסובך. במקום זאת, נפרק את X לסכום של משתנים מקריים ונשתמש בלינאריות.
נגדיר X_i אינדיקטורים של המאורעות בהם במקום i מתחיל רצף של 11, עבור $i=1,\dots,9$. נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{9} X_i = X$$

מלינאריות,

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{9}X_i\right]=\sum_{i=1}^{9}\mathbb{E}[X_i]=9\cdot\mathbb{E}[X_1]=9\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{100}$$

תרגיל מטילים n מטבעות הוגנים, שעל הצדדים שלהם כתוב 0,1 . X_i - תוצאת ההטלה במטבע במקום i. לאחר ההטלה מערבבים את סדר המטבעות, כך שכל סידור מתקבל בהסתברות שווה. Y_i - התוצאה במקום i אחרי הערבוב.

$$\begin{aligned}X &= \sum_{i=1}^{n} X_i\\ Z_i &= 1_{\{X_i=Y_i\}}\\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i\end{aligned}$$

1. $\mathbb{P}(Y_i=1)=?$
2. $\mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1)=?$
3. $\mathbb{P}(Z_i=1)=?$
4. $\mathbb{E}[Z]=?$
5. $\mathbb{P}(Z=n\mid X=k)=?$
6. $\mathbb{P}(Z=n)=?$

7. אם $n=15$, $\mathbb{P}(Z=0)=?$

8. $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z=0)=?$

פתרון

1. $\mathbb{P}(Y_i=1)=\frac{1}{2}$, משיקולי סימטריה. לכל מטבע במקום i יש סיכוי שווה ליפול על 0 או על 1 לפני הערבוב. בגלל שכל המטבעות הוגנים, אחרי הערבוב נקבל מטבע במקום i שסיכויו ליפול על 0 או על 1 שווה.

2. נחשב מפורשות: נגדיר $A_{j\to i}$ - המאורע בו המטבע במקום j עובר למקום i.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1) &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1,A_{j\to i})\cdot\mathbb{P}(A_{j\to i}\mid X_i=1)= \\ &= \sum_{j\neq i}\mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1,A_{j\to i})\cdot\mathbb{P}(A_{j\to i})+\mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1,A_{i\to i})\cdot\mathbb{P}(A_{i\to i})= \\ &= (n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. נשתמש בסעיף הקודם ונתנה על X_i:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_i=1) &= \mathbb{P}(Z_i=1\mid X_i=1)\cdot\mathbb{P}(X_i=1)+\mathbb{P}(Z_i=1\mid X_i=0)\cdot\mathbb{P}(X_i=0)= \\ &= \mathbb{P}(Y_i=1\mid X_i=1)\cdot\mathbb{P}(X_i=1)+\mathbb{P}(Y_i=0\mid X_i=0)\cdot\mathbb{P}(X_i=0)= \\ &= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

4.

$$\mathbb{E}[Z]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}Z_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Z_i]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2n}\cdot1+0\cdot\frac{n-1}{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2n}=n\cdot\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

5. נתון שיש k פעמים 1 וכן $n-k$ פעמים 0. שואלים מה הסיכוי שכל הערכים בכל המקומות יישמרו לאחר הערבוב:

$$\mathbb{P}(Z=n\mid X=k)=\frac{k!\,(n-k)!}{n!}=\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

6. נדלג - עמוד 79 בחוברת התרגולים.

7. בכדי שיתקיים $Z=0$ צריך שכל המקומות בהם היה 0 יחזיקו 1 אחרי הערבוב ולהיפך. כאשר יש מספר אי זוגי של מטבעות, זה לא אפשרי, כי חייב להיות מספר שווה של אפסים ואחדות.

8. עבור n אי זוגי, $\mathbb{P}(Z=0)=0$, לפי הסעיף הקודם. עבור n זוגי:

$$\mathbb{P}(Z=0)=\mathbb{P}\left(Z=0\mid X=\frac{n}{2}\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}\cdot\binom{n}{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$