מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

27 במרץ 2016

1 אי־תלות מותנה

הגדרה 1.1 מאורעות A,B הם בלתי תלויים בהינתן C אם מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\mid C\right)=\mathbb{P}\left(A\mid C\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\mid C\right)$$

מאורעות יכולים להיות תלויים בהינתן C אבל בלתי־תלויים באופן כללי, וגם להיפך.

הערה 1.2 אי־תלות של תת קבוצה של מאורעות לא גוררת אי־תלות של כלל הקבוצה.

תרגיל: על השולחן יש שני כדים. בכד א יש 3 כדורים לבנים וכן 5 כדורים אדומים, בכד ב יש 6 כדורים לבנים וכן 3 כדורים אדומים. אלון מטיל מטבע הוגן. אם יוצא עץ, הוא מוציא מכד א שני כדורים עם החזרה, אחרת יוצא שני כדורים עם החזרה מכד ב. A - הכדור הראשון לבן. B - הכדור השני לבן. C - יצא עץ.

1. האם A,B תלויים?
2. האם A,B תלויים בהינתן C?

פתרון:

1. נחשב את ההסתברויות בצורה מפורשת.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\right) &= \mathbb{P}\left(A\mid C\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)+\mathbb{P}\left(A\mid C^{c}\right)\cdot\mathbb{P}\left(C^{c}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{75}{144}\\ \mathbb{P}\left(B\right) &= \mathbb{P}\left(A\right)\end{aligned}$$

השוויון האחרון מתקיים בגלל ההחזרה.

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right)=\mathbb{P}\left(A\cap B\mid C\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)+\mathbb{P}\left(A\cap B\mid C^{c}\right)\cdot\mathbb{P}\left(C^{c}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{64}+\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{81}=\frac{337}{1152}\neq\left(\frac{75}{144}\right)^{2}$$

ולכן A,B תלויים.

2. חישוב דומה, רק שכעת ניתן להתבונן במרחב מצומצם, בו מוציאים כדורים רק מכד א.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid C) &= \frac{3}{8} = \mathbb{P}(B \mid C) \\ \mathbb{P}(A \cap B \mid C) &= \frac{9}{64}\end{aligned}$$

ולכן יש אי־תלות מותנה.

משפט 1.3 יהיו A, B, C מאורעות בעלי הסתברות חיובית. נניח שהמאורעות בלתי־תלויים. אזי A, B בלתי תלויים בהינתן C.

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$$

■

1.1 התנייה במרחב מותנה

אם נרצה, במרחב המותנה במאורע C, להשמש בנוסחת ההסתברות השלמה על מאורע B, נקבל

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C) + \mathbb{P}(A \mid B^c \cap C) \cdot \mathbb{P}(B^c \mid C)$$

תרגיל: מבצעים סדרה של הטלות בלתי־תלויות של קוביה הוגנת. התוצאה הגבוהה ביותר עד שלב n נקראת מקסימום זמני.

1. מה הסיכוי שהמספר 3 יהיה מקסימום זמני לפחות פעם אחת?
2. מה הסיכוי שכל המספרים בין 1 ובין 6 יהיו מקסימום זמני לפחות פעם אחת.

פתרון:

1. בעיה זו שקולה לשאלה לגבי הסיכוי שיצא 3 לפני שיוצאים 4, 5 או 6. בהנחה שאחת הספרות תצא בשלב מסויים,

$$\mathbb{P}(\{3\} \mid \{3,4,5,6\}) = \frac{1}{4}$$

2. כדי שכל המספרים יהיו מקסימום זמני, צריך שאחד יופיע לפני כל האחרים, 2 לפני השאר, וכן הלאה. לכן ההסתברות היא

$$\mathbb{P} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6!}$$

<u>תרגיל:</u> (מועד א, סמסטר ב, תשע"ד) ישנו מטבע מוטה שנופל על עץ בהסתברות $\frac{1}{3}$. מטילים אותו שוב ושוב, n פעמים, באופן בלתי תלוי. לכל $\varepsilon > 0$, נגדיר $A_{n,\varepsilon}$ להיות המאורע בו הרצף הארוך ביותר של עצים גדול יותר מאשר $(1+\varepsilon)\log_3(n)$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A_{n,\varepsilon}\right) \to 0$$

<u>פתרון:</u> לשם הפתרון נגדיר מאורעות עזר ונשתמש בחסם האיחוד. מסמנים

$$[(1+\varepsilon)\log_3(n)+1] = \underline{A_{n,\varepsilon}}$$

כמו כן נסמן $B_{n,\varepsilon}$ את המאורע בו יש רצף באורך $\underline{A_{n,\varepsilon}}$ עצים עד השלב מספר n, וכן $B_{n,\varepsilon}^i$ - המאורע בו בשלב i מתחיל רצף באורך $\underline{A_{n,\varepsilon}}$ של עצים. לצורך החישוב,

$$A_{n,\varepsilon} \subseteq B_{n,\varepsilon}$$

בנוסף מתקיים גם

$$B_{n,\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^{n-\underline{A_{n,\varepsilon}}+1} B_{n,\varepsilon}^i$$

ולכן

$$\mathbb{P}\left(A_{n,\varepsilon}\right) \le \mathbb{P}\left(B_{n,\varepsilon}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-\underline{A_{n,\varepsilon}}+1} B_{n,\varepsilon}^i\right)$$

כעת מחסם האיחוד:

$$\le \sum_{i=1}^{n-\underline{A_{n,\varepsilon}}+1} \mathbb{P}\left(B_{n,\varepsilon}^i\right) = \left(n-\underline{A_{n,\varepsilon}}+1\right)\cdot\mathbb{P}\left(B_{n,\varepsilon}^1\right) \le n\cdot\mathbb{P}\left(B_{n,\varepsilon}^1\right) = n\cdot 3^{-\underline{A_{n,\varepsilon}}}$$

ידוע לנו כי $\underline{A_{n,\varepsilon}} > (1+\varepsilon)\log_3 n$ ולכן

$$n^{-(1+\varepsilon)} = 3^{-(1+\varepsilon)\log_3 n} > 3^{-\underline{A_{n,\varepsilon}}}$$

לכן,

$$\mathbb{P}\left(A_{n,\varepsilon}\right) \le n\cdot n^{-(1+\varepsilon)} \to 0$$

<u>תרגיל:</u> יהיו $1 \le k \le n$ מספרים שלמים. בספארי נולדו לקרנף n גורים, כאשר כל גור יכול להיוולד לכל מין בהסתברות שווה ובאופן בלתי־תלוי ביתר הגורים. דוליטל מסתובב בגן החיות ופוגש גור באקראי. A - k הגורים הראשונים שנולדו הם זכרים, B - נולדו לפחות k גורים זכרים, C - דוליטל פוגש קרנף זכר.

1. עבור $n=2, k=1$ חשבו את $\mathbb{P}(C \mid B)$.
2. עבור $n=12, k=4$ חשבו את $\mathbb{P}(A \mid C)$.

<u>פתרון:</u>

1. נגדיר מאורעות עזר - D_i - נולדו בדיוק i גורים זכרים.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(C \cap B \mid D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(C \cap B \mid D_2) \cdot \mathbb{P}(D_2)}{1 - \mathbb{P}(B^c)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{4}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. נשתמש בבייס:

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\frac{1}{2}}$$

מאורע עזר, E - דוליטל פוגש את אחד מארבעת הגורים הראשונים שנולדו. נמשיך את השוויון שלנו:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbb{P}(C \mid A \cap E) \cdot \mathbb{P}(E \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C \mid A \cap E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\dfrac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\mathbb{P}(C \mid A \cap E) \cdot \mathbb{P}(E \mid A) + \mathbb{P}(C \mid A \cap E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c \mid A)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{12}\right) = \frac{1}{12}\end{aligned}$$