מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

6 במרץ 2016

1 מרחבי הסתברות כלליים

טענה 1.1 תהי $A_1, A_2, \ldots$ סדרה אינסופית של מאורעות. הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

הוכחה: נגדיר סדרת מאורעות חדשה,

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_k &= \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \end{aligned}$$

נשים לב כי לכל $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, כלומר הם זרים בזוגות.
בנוסף,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$$

לכן,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) - 0\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \end{aligned}$$

■

2 קומבינטוריקה

1. מספר הדרכים לסדר n עצמים בשורה: $n!$
2. מספר הדרכים לסדר n עצמים במעגל: $(n-1)!$
3. מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n עצמים ללא החזרה וללא חשיבות לסדר: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>הבינום של ניוטון:</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

<u>תרגיל:</u>

1. חשבו את

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2. הוכיחו כי

$$\sum_{0=k\in\mathbb{Z}_{odd}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{0=k\in\mathbb{Z}_{even}}^{n} \binom{n}{k}$$

3. הוכיחו כי

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \binom{n}{k}\right) = n \cdot 2^{n-1}$$

4. הוכיחו כי

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

<u>פתרון:</u>

.1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

.2

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{0=k\in\mathbb{Z}_{even}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{0=k\in\mathbb{Z}_{odd}}^{n}\binom{n}{k}$$

3. נפתור בעזרת בעיית עזר. נניח ויש n אנשים, ואנו מעוניינים לבחור וועד עם יושב ראש כאשר הוועד כולל את יושב הראש ואולי רק אותם.
דרך אחת - נבחר יושב ראש (n אפשרויות) ונבחר לאחר מכן וועד. עבור כל אדם מתוך $n-1$ הנותרים, ישנן שתי אפשרויות - נמצא בוועד או לא נמצא בוועד, לכן בסך הכל יש $n\cdot 2^{n-1}$ אפשרויות לבחירת הוועד.
דרך שנייה - נבחר וועד תחילה, מספר החברים בין 1 לבין n. מתוך הוועד נבחר יושב ראש. סך הכל יש מספר אפשרויות השווה

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k$$

4. נפתור שוב בעזרת בעיית עזר. נניח שיש שתי קבוצות אנשים, כל אחת בגודל n. אנו מעוניינים לבחור n נציגים.
דרל אחת - לבחור n אנשים מתוך $2n$. כמות האפשרויות היא $\binom{2n}{n}$.
דרך שנייה - לבחור k נציגים מהקבוצה הראשונה, ולבחור $n-k$ מהשנייה, כאשר $k=0,\dots,n$. מספר האפשרויות:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

3 מרחבי הסתברות אחידים

הגדרה 3.1 מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ נקרא <u>אחיד</u> אם לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים

$$\mathbb{P}(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$$

טענה 3.2 יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע במרחב הסתברות אחיד. אזי

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

3.1 פרמוטציות

הגדרה 3.3 תהי קבוצה סופית A כלשהי. פרמוטציה (תמורה) σ היא העתקה חד־חד־ערכית ועל מהקבוצה לעצמה.

לדוגמא, עבור $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, פרמוטציה $\sigma : A \to A$ ניתן לייצג בצוה גרפית או בצורה המטריציונית הבאה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

לחילופין, ניתן לרשום גם

$$\sigma = (a_1, a_3, a_2)$$

הגדרה 3.4 בתמורה σ קיים מעגל באורך n $1 \le k \le n$ אם קיימים k איברים שונים $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ כך שמתקיים $\sigma\left(a_{i_j}\right) = a_{i_{j+1}}$ לכל $1 \le j \le k-1$, וכן מתקיים $\sigma\left(a_{i_k}\right) = a_{i_1}$.

דוגמא:

$$\begin{aligned} \sigma \quad = \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & 1 \to 3 \to 4 \to 1 \\ & 2 \to 5 \to 2 \end{aligned}$$

הגדרה 3.5 נקודת שבת בפרמוטציה σ היא מעגל באורך 1, כלומר איבר $a \in A$ כך שמתקיים $\sigma(a) = a$.

תרגיל: מה ההסתברות שבפרמוטציה σ על קבוצה בגודל n, שנבחרה באופן אחיד, יש מעגל באורך n?

פתרון: נסמן בתור B את המאורע המבוקש, ונרצה לחשב

$$\mathbb{P}(B) = ?$$

גודל מרחב המדגם:

$$|\Omega| = n!$$

לכן,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{n!}$$

נחשב את $|B|$.

דרך אחת - לסדר את האיברים במעגל - $(n-1)!$

דרך שנייה - לבנות את הפרמוטציה איבר־איבר. לראשון יש $n-1$ אפשרויות (לא יכול להיות מופנה לעצמו). נניח שהוא שולח לאיבר מסויים. איבר זה יכול לשלוח לאחת מבין $n-2$ אפשרויות (לא לעצמו וכן לא חזרה לראשון). ממשיכים כך כד הסוף, עד שלבסוף לאיבר האחרון יש אפשרות יחידה - להפנות חזרה לאיבר הראשון. סה"כ $(n-1)!$ אפשרויות.

לכן

$$\mathbb{P}(B)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

תרגיל: מה ההסתברות שבפרמוטציה σ באורך $2n$ שנבחרה באופן אחיד יש בדיוק שני מעגלים באורך n כל אחד.

פתרון: נסמן בתור B את המאורע המבוקש, ונספור את האיברים בו.

נבחר n איברים מתוך $2n$, ונסדר כל קבוצה במעגל. כעת כל אפשרות נספרה פעמיים, עבור הבחירה של קבוצה אחת או של השנייה. לכן סך הכל נקבל:

$$|B|=\frac{1}{2}\binom{2n}{n}(n-1)!\,(n-1)!$$

ומקבלים

$$\mathbb{P}(B)=\frac{|B|}{(2n)!}=\frac{1}{2n^2}$$

4 הכלה והפרדה (הכלה והדחה)

עבור צמד מאורעות A,B מתקיים

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

הוכחה: נשים לב:

$$\begin{aligned}A\cup B &= (A\backslash B)\cup B\\ A &= (A\cap B)\cup(A\backslash B)\end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B) &= \mathbb{P}(A\backslash B)+\mathbb{P}(B)\\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\backslash B)\end{aligned}$$

משילוב שתי המשוואות נקבל את הנדרש. ■

הנוסחה הכללית עבור n מאורעות:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

עבור שלושה איברים:

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

תרגיל: עשרה זוגות מתיישבים באקראי סביב שולחן עגול. מה הסיכוי שאף זוג לא יושב יחד?

פתרון: B הוא המאוע המבוקש, נחפש את ההסתברות שלו.
נגדיר מאורעות עזר - A_i הוא המאורע בו הזוג מספר i יושב יחד.
ננסה לקשר בין B לבין A_i:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \\ &= 1-\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\dots,10\}} (-1)^{|I|+1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\end{aligned}$$

המספרים עצמם של הזוגות לא משנים - משנה רק כמה זוגות צריך שישבו יחד.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1-\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\cdot\binom{10}{k}\cdot\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \\ &= 1-\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\cdot\binom{10}{k}\cdot\frac{(19-k)!\cdot 2^k}{19!} = \\ &= \sum_{k=0}^{10}(-1)^{k}\cdot\binom{10}{k}\cdot\frac{(19-k)!\cdot 2^k}{19!}\end{aligned}$$