מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

28 בפברואר 2016

1 מרחבי מדגם ומאורעות

הגדרה 1.1 מרחב המדגם (מסומן Ω) הוא קבוצת כל התוצאות האפשריות בניסוי. צורה מנוונת היא להוסיף תוצאות לא אפשריות. איברים במרחב המדגם מסומנים לרוב ω.

הגדרה 1.2 מאורע A הוא תת קבוצה של מרחב המדגם.

דוגמאות:

1. הטלת מטבע הוגן: על צד אחד כתוב 0, על השני 1: $\Omega=\{0,1\}$.
2. הטלת קוביה הוגנת: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
3. הטלת קוביה מספר כלשהו של פעמים: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^{n}$.
4. הוצאה ללא החזרה של שני כדורים מכד: למשל, כשבכד יש שני כדורים לבנים ואחד שחור: $\Omega=\{(w,w),(w,b),(b,w)\}$.

הגדרה 1.3 אם A הוא מאורע, אזי $\overline{A}$ הוא המאורע המשלים (מסומן גם A^{c}) ומוגדר באופן הבא: $\overline{A}=A^{c}=\Omega\backslash A$.

תרגיל: בכל יום מארבעת הימים הבאים מבצעים ניסוי. כל ניסוי יכול להצליח או להיכשל. A_i הוא המאורע בוא הניסוי ביום מספר i הצליח.

1. האם המאורעות A_1,A_2,A_3,A_4 זרים? זרים בזוגות?
2. תארו את המאורעות הבאים בעזרת איחודים, חיתוכים ומשלימים בלבד:
   - כל הניסויים הצליחו.
   - כל הניסויים נכשלו.
   - לפחות אחד מהניסויים הצליח.
   - הניסוי הראשון שהצליח היה ביום השלישי.
   - הניסוי השני שהצליח היה ביום השלישי.

כדי לענות על השאלה עלינו לתת הגדרות:

הגדרה 1.4 מאורעות A, B הם זרים אם ורק אם $A \cap B = \emptyset$.

הגדרה 1.5 מאורעות $A_1, \ldots A_n$ זרים בזוגות אם ורק אם לכל i, j, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

התשובה לשאלה הראשונה היא, אם כן, לא! נגדיר

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

לכן, מתקיים למשל:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(1, 1, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \{0, 1\}\} \\ \bigcap_{i=1}^{4} A_i &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

כעת נפתור את החלק השני.

- כל הניסויים הצליחו:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

- כל הניסויים נכשלו:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$$

- לפחות ניסוי אחד הצליח:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

- הניסוי הראשון שהצליח היה ביום השלישי:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$$

- הניסוי השני שהצליח היה ביום השלישי:

$$\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$$

1.1 כללי דה־מורגן

עבור מאורעות $A_1,\dots A_n\subseteq\Omega$:

1.

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

2.

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

הוכחה: נוכיח מפורשות מקרה פרטי:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

ההוכחה היא על ידי הכלה דו כיוונית.

$$\omega\in\overline{A\cup B}\iff\omega\notin A\cup B\iff\omega\notin A\wedge\omega\notin B\iff\omega\in\overline{A}\wedge\omega\in\overline{B}\iff\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

■

2 מרחב הסתברות

הגדרה 2.1 מרחב הסתברות הוא זוג $(\Omega,\mathbb{P})$, כאשר Ω הוא מרחב המדגם, $\mathbb{P}$ היא פונקציה $\mathbb{P}:2^{\Omega}\to[0,1]$ (ניתן להגדיר גם את Ω כתחום, אבל כך כללי ומדוייק יותר) המקיימת:

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)&=1\\ \mathbb{P}(A)&=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

לדוגמא, בהטלת קובייה הוגנת:

$$\begin{aligned}\Omega&=\{1,2,3,4,5,6\}\\ \mathbb{P}(\omega)&=\frac{1}{6}\quad\forall\omega\in\Omega\\ \mathbb{P}(\{1,2,6\})&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

מסקנות ישירות מהגדרת מרחב הסתברות:

•

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

•

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

טענה 2.2 יהי $A \subseteq \Omega$ מאורע במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$. אזי מתקיים $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in \overline{A}} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A \cup \overline{A}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

■

תרגיל: יהי מרחב מדגם $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ופונקציית הסתברות $\mathbb{P}(i) = \frac{k}{3^i}$ עבור k קבוע כשלהו. נגריל מספר לפי $\mathbb{P}$.

1. מצאו את k.
2. חשבו את הסיכוי שהמספר שהוגרל זוגי.
3. חשבו את הסיכוי שהמספר שהוגרל אי־זוגי.

פתרון:

1. נשתמש בתנאי הנרמול:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{3^i} = k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = k \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

2. נסמן A ־ המספר שהוגרל זוגי.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$

3. נחשב את ההסתברות של $\overline{A}$:

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

טענה 2.3 יהיו A,B מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$. נתון $A\subseteq B$. אזי

$$\mathbb{P}\left(B\backslash A\right)=\mathbb{P}\left(B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)$$

הוכחה: נשים לב כי מתקיים $B=A\cup\left(B\backslash A\right)$. לכן

$$\mathbb{P}\left(B\right)=\sum_{\omega\in A\cup\left(B\backslash A\right)}\mathbb{P}\left(\omega\right)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}\left(\omega\right)+\sum_{\omega\in B\backslash A}\mathbb{P}\left(\omega\right)=\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(B\backslash A\right)$$

$\blacksquare$

משפט 2.4 <u>**חסם האיחוד:**</u> יהיו $A_1,\dots A_n\subseteq\Omega$ מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$. אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)$$

הערה 2.5 מתקיים שיוויון כאשר הקבוצות זרות בזוגות.

הוכחה: (מקוצרת)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\omega\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\mathbb{P}\left(\omega\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{\omega\in A_i}\mathbb{P}\left(\omega\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)$$

$\blacksquare$

<u>**תרגיל:**</u> יהיו מאורעות $A_1,\dots A_n,B_1,\dots,B_n\in\Omega$ כך שלכל i מתקיים $A_i\subseteq B_i$. הראו כי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)$$

<u>**פתרון:**</u> נוכיח תחילה כי

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(B_i\backslash A_i\right)$$

יהי $\omega\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$. זאת אומרת שקיים $1\leq j\leq n$ כך שמתקיים $\omega\in B_j$ וכן לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $\omega\notin A_i$. בפרט, $\omega\in B_j\backslash A_j$, ולכן $\omega\in\bigcup_{i=1}^{n}\left(B_i\backslash A_i\right)$. כעת:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)\leq\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(B_i\backslash A_i\right)\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_i\backslash A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)\end{aligned}$$