מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

20 במרץ 2016

1 אי־תלות

ראינו שאי־תלות של A,B שקולה לכך שמתקיים:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A\cap B^c) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\\
\mathbb{P}(A^c\cap B) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A^c\cap B^c) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

הגדרה 1.1 שלושה מאורעות A,B,C נקראים בלתי־תלויים אם מתקיים

$$\begin{aligned}
a-\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\
b-\mathbb{P}(A\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)\\
c-\mathbb{P}(B\cap C) &= \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\\
d-\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)
\end{aligned}$$

כמו כן, ניתן לבנות מרחב הסתברות ושלושה מאורעות בו שכל שניים מהם בלתי־תלויים, אבל שלושתם יחד אינם בלתי־תלויים (תרגיל למחשבה).

אי־תלות של A,B,C שקולה לכך שמתקיים:

$$\begin{aligned}
1-\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\\
2-\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)\\
3-\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C)\\
4-\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)\\
5-\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\\
6-\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C^c) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)\\
7-\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C)\\
8-\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C^c) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)
\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ הם בלתי־תלויים אם לכל תת קבוצה $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ שמקיימת $|I|\geq 2$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i\right)$$

הגדרה 1.3 (הגדרה 2) מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ הם בלתי־תלויים "לפי הגדרה 2" אם מתקיימים השוויונות

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_i\right)$$

כאשר לכל i מתקיים

$$B_i\in\{A_i,A_i^c\}$$

טענה 1.4 שתי ההגדרות לעיל שקולות.

הוכחה: נוכיח עבור $n=3$. נניח קודם שהמאורעות A,B,C בלתי־תלויים לפי ההגדרה השנייה. השוויון d הוא למעשה השוויון 1, אז לא צריך להוכיח. כעת נוכיח את שוויון a. נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}
A\cap B &= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\\
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A\cap B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)=\\
&= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)=\\
&= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\left(\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(C^c)\right)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

באופן סימטרי משיגים את שוויונות b,c. עבור n גבוה יותר ניתן לבצע את אותו חישוב, רק ביותר שלבים.
כעת נניח את ההגדרה הראשונה. כמובן, שוויון 1 הוא שוויון d. כדי לקבל את שוויון 2, נשתמש באותה משוואה שהשתמשנו בה קודם, בכיוון ההפוך, ונקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A\cap B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)=\\
&= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)\\
\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\left(1-\mathbb{P}(C)\right)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)
\end{aligned}$$

את שוויונות $3,4$ מקבלים באותו צורה. נוכיח כעת את שוויון 7.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c) &= \mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c)=\\
&= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c)
\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל את שוויון 7. התשמשנו בדרך בשוויון 3 ומשוויון a. כך נקבל גם את שוויונות $5, 6$, וגם שוויון 8 נובע כך.
ההוכחה עבור כמות כללית של מארעות היא באותו אופן ומתבססת על אינדוקציה כפולה. מניחים שהטענה נכונה עבור $n-1$ מאורעות, ולאחר מכן מוכיחים באינדוקציה על כמות המשלימים בכל שוויון. ■

המשך התרגיל למחשבה ־ מצאו מרחב הסתברות וכן n מאורעות בו כך שכל $n-1$ מהם בלתי־תלויים, אבל כולם יחד אינם בלתי־תלויים. המשך נוסף ־ להסיק זאת בלי בנייה, משיקולים כלליים של אלגברה לינארית.

2 מרחבי מכפלה

נטיל טוביה הוגנת ומטבע עם הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ. מרחב הסתברות מתאים יהיה המכפלה הקרטזית של מרחבי המדגם לכל אחד מהניסויים בתור מרחב מדגם, ופונקציית הסתברות שמכפילה את פונקציות ההסתברות של כל אחד מהניסויים.