מבוא להסתברות

© ארזים

13 במרץ 2013

בשיעור שעבר ראינו כי הגדרת פונקציית ההסתברות במרחב הסתברות מותנה היא טובה, כלומר ניתן להגדיר אותה כפונקציית הסתברות.

דוגמה: נטיל מטבע שלו הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ פעמיים. ידוע כי לפחות אחת התוצאות הייתה עץ. מה ההסתברות שבהטלה הראשונה התקבל עץ?

פתרון: נגדיר את מרחב ההסתברות:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(t,t),(t,h),(h,t),(h,h)\} \\ \mathbb{P} &= \left\{\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right\} \end{aligned}$$

נסמן בתור B את המאורע בו בלפחות אחת מן ההטלות התקבל עץ.

$$B=\{(t,t),(t,h),(h,t)\}$$

נרצה לדבר על מרחב ההתסברות המותנה במאורע B, ולשם כך יש לבדוק שהסתברותו חיובית.

$$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

כעת נגדיר:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(t,t),(t,h),(h,t),(h,h)\} \\ \mathbb{P}(\omega\mid B) &= \left\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},0\right\} \end{aligned}$$

כעת, אם נגדיר בתור A את המאורע בו בהטלה הראשונה התקבל עץ, יתקיים

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}((t,t)\mid B)+\mathbb{P}((t,h)\mid B)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

כאשר נתון מאורע A כמו בכל מרחב הסתברות, נוכל לחשב את ההסתברות במרחב המותנה:

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega\mid B)$$

למה 0.1 מתקיים

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid B) &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega \mid B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}(\omega \mid B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \cdot \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}(\omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{aligned}$$

■

<u>דוגמה ותוצאות כלליות:</u> נאמר וחלק p של האוכלוסיה חולה במחלה מסוימת ($0 \le p \le 1$), וישנה בדיקה לגילוי המחלה. כאשר אדם בריא נבדק, הבדיקה אומרת שהוא חולה בסיכוי q. כאשר אדם חולה נבדק, הבדיקה אומרת שהוא חולה בסיכוי r.

מצב האדם/תוצאת הבדיקה	בריא	חולה
בריא - $1-p$	$1-q$	q
חולה - p	$1-r$	r

<u>שאלות:</u> אדם שנבחר באופן אקראי מן האוכלוסיה נבדק.

1. מה הסיכוי שהוא חולה? p, לפי הנתון.
2. מה הסיכוי שהוא חולה והבדיקה תאמר שהוא חולה? $p \cdot r$. באופן פורמלי יותר: מרחב המדגם הוא קבוצת כלל האוכלוסיה, ופונקצית ההסתברות נותנת לכולם סיכוי שווה (מרחב הסתברות אחיד). נסמן בתור B את המאורע בו האדם שנבחר חולה, ובתור A את המאורע בו הבדיקה אמרה שהאדם חולה. נניח שמתקיים $0 < p < 1$. מהם הנתונים?

$$\mathbb{P}(B) = p, \mathbb{P}(A \mid B) = r, \mathbb{P}(A \mid B^c) = q$$

בשאלה, אנו רוצים לחשב את ההסתברות של $A \cap B$. מהלמה הקודמת,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) = p \cdot r$$

זוהי למעשה למה.

למה 0.2 (כלל השרשרת, כלל המכפלה) אם A, B מאורעות ומתקיים $\mathbb{P}(B) > 0$, אזי

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$$

3. מה הסיכוי שהבדיקה תאמר שהאדם חולה? $p \cdot r + (1-p) \cdot q$. צריך למצוא את $\mathbb{P}(A)$. מתקיים:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \cap B) \uplus (A \cap B^c)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \\ &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c) = p \cdot r + (1-p) \cdot q\end{aligned}$$

גם מכאן נובעת למה:

למה 0.3 (נוסחת ההסתברות השלמה) אם A, B מאורעות ומתקיים $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, אזי

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)$$

4. בהינתן שהבדיקה אמרה שהאדם חולה, מה ההסתברות שהוא באמת חולה? נרצה לחשב את

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)} = \frac{p \cdot r}{p \cdot r + (1-p) \cdot q}$$

זוהי למה נוספת:

למה 0.4 (חוק בייז) אם A, B מאורעות ומתקיים $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ וגם $\mathbb{P}(A) > 0$, אזי

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)}$$