<u>מבוא להסתברות</u>

© ארזים

29 במאי 2016

ניזכר בהגדרת שרשרת מרקוב. היא מורכבת משלושה נתונים, והם:

1. קבוצת מצבים <u>סופית</u> S.
2. מטריצת מעבר P בגודל $S \times S$, שמקיימת

$$\begin{aligned} \forall x,y &\in S \;\; P(X,Y) \geq 0 \\ \forall x &\in S \;\; \sum_{y} P(x,y) = 1 \end{aligned}$$

3. התפלגות התחלתית μ על S.

שרשרת המרקוב עד זמן n היא המשתנים המקריים $X_0,\ldots,X_n$ שמקבלים ערכים בקבוצה S ומקיימים

$$\mathbb{P}_{\mu}(X_0 = x_0,\ldots,X_n = x_n) = \mu(x_0) \cdot P(x_0,x_1) \cdot \cdots \cdot P(x_{n-1},x_n)$$

ראינו את תכונת מרקוב: העתיד בלתי תלוי בעבר בהינתן ההווה.
כמו כן, נסמן את ההתפלגות של X_t בתור μ_t, כלומר $\forall x \in S \;\; \mu_t(x) = \mathbb{P}_{\mu}(X_t = x)$.

למה 0.1 μ_t כווקטור שורה מקיימת

$$\mu_t = \mu P^t$$

הגדרה 0.2 התפלגות π על מרחב המצבים S נקראת <u>סטציונרית</u> (עמידה) אם $\pi = \pi \cdot P$.

שאלות

1. האם תמיד קיימת התפלגות סטציונרית?
2. האם היא יחידה?
3. האם יש התכנסות אליה, במובן כלשהו?

4. דרכים יעילות למצוא התפלגות סטציונרית.

לגבי השאלה הרביעית, נדבר רק על מקרה פרטי אחד:

תרגיל נתון גרף סופי $G = \langle V, E\rangle$ ללא קודקודים מבודדים. שרשרת מרקוב היא <u>הילוך מקרי פשוט</u> על G אם $S = V$, וכן

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

במצב זה, π שמוגדרת על ידי

$$\pi(x) = \frac{\deg(x)}{2|E|}$$

היא התפלגות סטציונרית.

פתרון נבדוק שאכן מתקיים $\pi \cdot P = \pi$. לכל $x \in S$ מתקיים

$$(\pi \cdot P)(x) = \sum_{y\in S} \pi(y) \cdot P(y,x) = \sum_{\substack{y\in S\\(x,y)\in E}} \pi(y) \cdot \frac{1}{\deg(y)} = \sum_{\substack{y\in S\\(x,y)\in E}} \frac{1}{2|E|} = \frac{\deg(x)}{2|E|} = \pi(x)$$

כמו כן, π התפלגות, שכן

$$\begin{aligned} \forall x &\in S \ \ \pi(x) \geq 0 \\ \sum_{x\in S} \pi(x) &= \sum_{x\in S} \frac{\deg(x)}{2|E|} = \frac{2|E|}{2|E|} = 1 \end{aligned}$$

נעבור לדון בקיום התפלגות סטציונרית.

הערה 0.3 קל לבדוק שאכן 1 הוא ערך עצמי של P. אכן,

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן 1 הוא ערך עצמי מימין, ולכן גם משמאל, שכן למטריצות P, P^t יש את אותם ערכים עצמיים.

נובע שקיים ווקטור $\nu \neq 0$ כך שמתקיים $\nu \cdot P = \nu$. אבל לא ברור שכל הקואורדינטות של ν אי שליליות.

משפט 0.4 לכל שרשרת מרקוב קיימת התפלגות סטציונרית.

הוכחה: נקבע התפלגות התחלתית μ כלשהיא. נגדיר, לכל $t \geq 1$, את π_t להיות ממוצע הזמן ששהינו בכל מצב $x \in S$ עד זמן $t-1$. כלומר, אם נגדיר את המשתנה A להיות כמות הערכים מבין $X_0, \ldots, X_{t-1}$ ששווים לערך x, נקבל

$$\begin{aligned}\pi_t &= \frac{\mathbb{E}_\mu(A)}{t} = \frac{\mathbb{E}_\mu\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1_{(X_i=x)}\right)}{t} = \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t-1}\mathbb{P}_\mu(X_i=x) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t-1}\left(\mu\cdot P^i\right)_x = \\ &= \frac{1}{t}\left(\mu(x) + (\mu\cdot P)(x) + \cdots + \left(\mu P^{t-1}\right)(x)\right)\end{aligned}$$

טענה 0.5 ישנה תת סדרת (t_k) כך שמתקיים

$$\pi_{t_k}(x) \to \pi(x)$$

וכן π היא התפלגות סטציונרית.

הוכחה: לכל $x \in S$, $0 \leq \pi_t \leq 1$. לכן, קיימת תת סדרה (t_k) כך שהיא מתכנסת לכל x. נגדיר

$$\pi(x) = \lim_{k\to\infty} \pi_{t_k}$$

נוכיח שאכן π התפלגות סטציונרית. ראשית, לכל $x \in S$, מתקיים כמובן $\pi(x) \geq 0$, וכן לכל $t \geq 1$, $\sum_{x\in S}\pi_t(x) = 1$, ולכן בפרט כאשר ניקח גבול נקבל שמתקיים $\sum_{x\in S}\pi(x) = 1$.

נותר להראות $\pi \cdot P = \pi$. מספיק להוכיח כי לכל $x \in S$ מתקיים

$$\left|(\pi_t\cdot P)_x - (\pi_t)_x\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

אכן,

$$\pi_t\cdot P - \pi_t = \frac{1}{t}\left(\mu\cdot P^t - \mu\right)$$

כלומר

$$(\pi_t\cdot P)_x - (\pi_t)_x = \frac{1}{t}\left(\left(\mu\cdot P^t\right)_x - \mu_x\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

■

■