מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

2 במרץ 2016

1 מאורעות

הגדרה 1.1 מאורע הוא תת קבוצה של מרחב המדגם Ω.

נרחיב את הגדרת פונקצית ההסתברות $\mathbb{P}$ למאורעות באופן הבא: אם $A \subseteq \Omega$ מאורע, אזי נגדיר

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$$

דוגמאות:

1. הטלת קוביה: נגדיר את המאורע A להיות המאורע בו תוצאת הקוביה זוגית. במידול שנתנו בשיעור שעבר, נקבל

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6\} \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(4)+\mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. הטלת מטבע לא הוגן: נטיל פעמיים מטבע עם הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ. נגדיר את המאורע A להיות המאורע בו התקבל לפחות עץ אחד. קיימים שני מידולים אפשריים לניסוי:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(t,t),(t,h),(h,t),(h,h)\} \\ \mathbb{P} &= \left\{\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right\} \\ A &= \{(t,t),(t,h),(h,t)\} \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((t,t))+\mathbb{P}((t,h))+\mathbb{P}((h,t)) = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

או לחילופין:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{2t,1t,0t\} \\ \mathbb{P} &= \left\{\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right\} \\ A &= \{2t,1t\} \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2t)+\mathbb{P}(1t) = \frac{1}{9}+\frac{4}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

וקיבלנו את אותה תוצאה.
כעת נגדיר את המאורע B להיות המאורע בו תוצאת ההטלה הראשונה היא עץ. במידול הראשון שהצגנו נקבל

$$\begin{aligned} B &= \{(t,t)\,,),(t,h)\} \\ \mathbb{P}\left(B\right) &= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

וזה תואם את האינטואיציה - המאורע דומה להטלה יחידה של מטבע כזה. בהמשך הקורס נסביר מדוע האינטואיציה הזו מסתדרת.
נשים לב שבמידול השני שהצגנו, לא ניתן להציג את המאורע B, שכן מידול זה לא "זוכר" באיזו הטלה יצאה איזו תוצאה.

2 תכונות בסיסיות של מרחב הסתברות

למה 2.1 יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\emptyset\right) &= 0 \\ \mathbb{P}\left(\Omega\right) &= 1 \end{aligned}$$

הוכחה: מהגדרת מאורע ומהעובדה שמתקיים

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)=1$$

■

הגדרה 2.2 עבור מאורע A נגדיר את המאורע המשלים A^c באופן הבא:

$$A^c=\Omega\backslash A$$

למה 2.3

$$\mathbb{P}\left(A^c\right)=1-\mathbb{P}\left(A\right)$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(A^c\right)=\sum_{\omega\in A^c}\mathbb{P}\left(\omega\right)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)-\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}\left(\omega\right)=1-\mathbb{P}\left(A\right)$$

■

למה 2.4 (מונוטוניות פונקציית ההסתברות) אם $A \subseteq B$ מאורעות, אזי

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in B \setminus A} \mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(A)$$

אי השוויון מתקיים משום שפונקציית ההסתברות היא אי שלילית. ■

למה 2.5 (הסתברות איחוד זר) יהיו A, B מאורעות זרים (כלומר $A \cap B = \emptyset$). אזי

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

באופן כללי יותר, אם $A_1, A_2, \ldots$ סדרה אינסופית של מאורעות זרים (כלומר $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$) אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: נוכיח ראשית את השוויון הראשון.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

הפיצול הזה חוקי משום שכל איבר באיחוד נמצא באחד בדיוק מבין המאורעות, שכן הם זרים.

ההוכחה של השוויון השני זהה:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_n} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

ושוב, הפיצול חוקי כמו קודם. ■

תזכורת - חוקי דה מורגן: יהיו A, B מאורעות. אזי

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

למה 2.6 (הסתברות של איחוד) יהיו A, B מאורעות. אזי

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \sum_{\omega \in A \cup B} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}(\omega) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

ההסבר כאן הוא שכל איבר באיחוד ששייך למאורע אחד בלבד יופיע באגף ימין פעם אחת, בעוד איברים ששייכים לשניהם ייסכמו פעמיים, אבל יחוסרו בחיתוך. ■

למה 2.7 (חסם האיחוד) אם A, B מאורעות אז

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

באופן יותר כללי, אם $A_1, A_2, \ldots$ סדרת מאורעות, אז

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: נוכיח רק את הגרסה הכללית יותר (שממנה נובעת הגרסה הפרטית).

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \mathbb{P}(\omega) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

אי השוויון נכון משום שכל איבר באחד מהמאורעות יופיע בסכום לפחות פעם אחת. ■

3 מרחב הסתברות אחיד

הגדרה 3.1 מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ ייקרא <u>אחיד</u> אם Ω היא קבוצה סופית וכן לכל $\omega \in \Omega$ מתקיים

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

דוגמא למרחב הסתברות אחיד היא הטלת הקוביה שראינו.
<u>נוסחא בסיסית:</u> במרחב הסתברות אחיד, לכל מאורע A מתקיים

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)=\sum_{\omega\in A}\frac{1}{|\Omega|}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

■

<u>דוגמא יותר מורכבת:</u> תמורה (פרמוטציה) על האיברים $\{1,\ldots,n\}$ היא פונקציה חד חד ערכית ועל

$$\Pi:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots n\}$$

נסמן את אוסף כל התמורות על n איברים S_n. מתקיים

$$|S_n|=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1=n!$$

עבור תמורה $\Pi\in S_n$ נסמן בתור $C_1(\Pi)$ את המעגל של 1 בתמורה Π, כלומר $C_1(\Pi)=(1,a_2,a_3,\ldots,a_k)$, כאשר מתקיים

$$\begin{aligned}\Pi(1)&=a_2\\ \Pi(a_i)&=a_{i+1}\quad\forall 2\le i\le k-1\\ \Pi(a_k)&=1\end{aligned}$$

כאן k הוא האורך של המעגל של 1 בתמורה Π.
כעת, יהי n טבעי נתון. נגריל תמורה מתוך S_n באופן אחיד (כלומר סיכוי שווה לכל תמורה). מה ההסתברות שהמעגל שמכיל את 1 הוא באורך k, עבור $1\le k\le n$ נתון?
מסתבר שההסתברות היא בדיוק $\frac{1}{n}$ לכל $1\le k\le n$. **הוכחה:** עבור $1\le k\le n$ נגדיר את המאורע A_k להיות המאורע שבו אורך המעגל של 1 הוא בדיוק k. ניקח את $\Omega=S_n$, וכן $\mathbb{P}(\Pi)=\frac{1}{|S_n|}=\frac{1}{n!}$ לכל $\Pi\in S_n$. זהו מרחב הסתברות אחיד. נרצה לחשב את

$$\mathbb{P}(A_k)=\frac{|A_k|}{n!}$$

למשל, $|A_1|=(n-1)!$, שכן אנחנו יודעים שהמעגל של 1 הוא בגודל 1, לכן הוא הולך לעצמו, ונותר לסדר את שאר האיברים - וזו תמורה על $n-1$ איברים. לכן,

$$\mathbb{P}(A_1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

כעת, יהי $2 \leq k \leq n$. עבור $2 \leq a_2, \ldots, a_k \leq n$ שונים נגדיר את המאורע $B_{a_2,\ldots a_k}$ להיות המאורע בו בו מתקיים $C_1(\Pi) = (1, a_2, \ldots, a_n)$. אז מתקיים

$$A_k = \bigcup_{2 \leq a_2,\ldots a_k \leq n} B_{a_2,\ldots a_k}$$

והמאורעות באיחוד זרים, שכן לא יכול להיות שמספר a עובר גם למספר b וגם למספר b'.

כיוון שהאיחוד זר, נקבל

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{2 \leq a_2,\ldots,a_k \leq n} \mathbb{P}(B_{a_2,\ldots,a_k}) = \sum_{2 \leq a_2,\ldots,a_k \leq n} \frac{|B_{a_2,\ldots,a_k}|}{n!}$$

טענה 3.2 לכל $2 \leq a_2, \ldots, a_k \leq n$ שונים מתקיים

$$|B_{a_2,\ldots,a_k}| = (n-k)!$$

הוכחה: יש התאמה בין התמורות במאורע $B_{a_2,\ldots a_k}$ לבין תמורות על $\{1,\ldots,k\} \setminus \{1, a_2, \ldots, a_k\}$, שהן תמורות על $n-k$ איברים, ומכאן

$$|B_{a_2,\ldots,a_k}| = (n-k)!$$

■

בסך הכל:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \sum_{2 \leq a_2,\ldots,a_k \leq n} \frac{|B_{a_2,\ldots,a_k}|}{n!} = \sum_{2 \leq a_2,\ldots,a_k \leq n} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= (n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

■